Preuve de confluence de la relation de réécriture $uw\overline{w}wv \rightsquigarrow uwv$

Paul Brunet

14 août 2013

Résumé

On va donner ici le plan d'une preuve de la confluence de la relation de réécriture $uw\overline{w}wv \rightsquigarrow uwv$,qui apparait de manière prépondérante dans l'étude de la décidabilité de l'algèbre CKA (algèbre de Kleene avec converse). Cette preuve a été vérifiée avec Coq, aussi nous ne nous attarderons pas trop ici sur les détails calculatoires.

Préliminaires

On notera $|x|$ pour la longueur du mot x et $\mathbb{1}$ le mot vide.

On se place ici dans un alphabet fixé X, que l'on muni d'une opération "prime" involutive et sans point fixe :

$$\forall x \in X, x' \neq x \wedge x = x''. \tag{1}$$

On étend cette opération aux mots par une opération "converse", définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{1}} = \mathbb{1} \\ \forall x \in X, \forall w \in X^*, \overline{xw} = \overline{w}x' \end{cases} \tag{2}$$

Définition (Relation de réduction)

$$u \rightsquigarrow v \quad \text{signifie que} \quad \exists a, b, c \in X^* : u = ab\overline{b}bc \wedge v = abc.$$ *

La preuve en Coq utilise intensivement le lemme suivant :

Lemme i (Décomposition):

$$\forall a, b, c, d \in X^*, ab = cd \Rightarrow \exists e : (a = ce \wedge d = eb) \vee (c = ae \wedge b = ed).$$ ∎

Graphiquement, cela signifie que si $ab = cd$ alors :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \multicolumn{2}{|c|}{a} & b \\ \hline c & x & b \\ \hline c & \multicolumn{2}{c|}{d} \\ \hline \end{array} \text{ ou } \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & \multicolumn{2}{c|}{b} \\ \hline a & x & d \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{c} & d \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

On aura aussi besoin de quelques autres lemmes.

Lemme ii ($ab = ca$):

$$\forall a, b, c \in X^*, ab = ca \wedge c \neq \mathbb{1} \Rightarrow \exists d, e : c = de \wedge a \in (de)^* d.$$ ∎

Preuve On va procéder par induction sur a.

- Si $a = \mathbb{1}$, $c = c\mathbb{1}$ et $a = \mathbb{1} \in (c\mathbb{1})^*\mathbb{1}$.
- On applique le lemme de décomposition.
  - Si $c = ax \wedge b = xa$, alors $a \in (ax)^*a$.
  - Sinon $a = cx \wedge a = xb$, donc $xb = cx$. Comme $c \neq \mathbb{1}$, $0 < |c|$ et donc $|x| < |x| + |c| = |a|$. On applique donc l'hypothèse d'induction qui nous indique que $c = de$ et $x \in (de)^*d$, c'est à dire $a = cx \in de(de)^*d \subseteq (de)^*d$. □

Lemme iii ($u = \overline{u}$):

$$\forall u \in X^*, u = \overline{u} \Leftrightarrow \exists t : u = t\overline{t}.$$ ■

Preuve **Sens direct :** par induction sur u :

- $\mathbb{1} = \overline{\mathbb{1}}$ et $\mathbb{1} = \mathbb{1}\overline{\mathbb{1}}$.
- $xu = \overline{xu} = \overline{u}x'$, si $u = \mathbb{1}$, alors $x = x'$, ce qui est interdit par définition de $.'$, donc $u = vy$ ($v \in X^*$ et $y \in X$). De plus $xvy = \overline{vy}x' = y'\overline{v}x'$, donc $y = x'$ et $v = \overline{v}$. Par induction ($|v| = |xu| - 2$), on obtient $v = t\overline{t}$, et donc $xu = xt\overline{t}x' = xt \cdot \overline{xt}$.

Sens retour : $\overline{t \cdot \overline{t}} = \overline{\overline{t}} \cdot \overline{t} = t \cdot \overline{t}$. □

Il est bon de remarquer que le lemme ci-dessus dépend crucialement du fait que $\forall a, a \neq a'$. En effet, si $a = a'$, il n'y a aucun t tel que $a = t\overline{t}$.

Lemme iv ($u\overline{u} \cdot \overline{v} = v \cdot u\overline{u}$):

$$\forall u, v \in X^*, u\overline{u} \cdot \overline{v} = v \cdot u\overline{u} \wedge 2|u| \leqslant |v| \Rightarrow \exists t : v = u\overline{u} \cdot t\overline{t}.$$ ■

Preuve On décompose $u\overline{u} \cdot \overline{v} = v \cdot u\overline{u}$:

- $u\overline{u} = vx \wedge u\overline{u} = xv$: $|v| + |x| = |vx| = |u\overline{u}| = 2|u| \leqslant |v|$ donc $x = \mathbb{1}$, donc $v = u\overline{u}\mathbb{1}\overline{\mathbb{1}}$.
- $v = u\overline{u}x \wedge \overline{v} = xu\overline{u}$. Dans ce cas $xu\overline{u} = \overline{v} = \overline{u\overline{u}x} = \overline{x} \cdot u\overline{u}$, d'où l'on déduit $x = \overline{x}$. Par le lemme précedent, on peut écrire $x = t\overline{t}$, et donc $v = u\overline{u} \cdot x = u\overline{u} \cdot t\overline{t}$. □

Lemme v:

$$\forall a, b, c, d \in X^*, ab = cad \Rightarrow \exists t, s : b = tsd \wedge c = st \wedge ca = ats.$$ ■

Preuve On va faire une induction sur a :

- $b = c\mathbb{1}d \Rightarrow b = \mathbb{1}cd \wedge c = c\mathbb{1} \wedge c\mathbb{1} = \mathbb{1}\mathbb{1}c$.
- On décompose l'hypothèse :
  - $a = cx \wedge ad = xb$: dans ce cas on remarque que $cxd = xb$, on va appliquer l'hypothèse d'induction (si $c = \mathbb{1}$ le résultat est trivial et sinon $|a| = |c| + |x| > |x|$). Cela nous donne $b = tsd \wedge c = st \wedge cx = xts$, d'où l'on déduit $ca = ccx = cxts = ats$.
  - $c = ax \wedge b = xad$: il suffit de prendrte $t = x$ et $s = a$. □

On note $u_1 \leftrightsquigarrow u_2$ pour $\exists v : u_1 \rightsquigarrow^* v \wedge u_2 \rightsquigarrow^* v$. Le théorème que l'on souhaite montrer ici est le suivant :

Théorème (Confluence locale):

$$\forall u, v1, v2 \in X^*, u \rightsquigarrow v_1 \wedge u \rightsquigarrow v_2 \Rightarrow v_1 \leftrightsquigarrow v_2.$$

Pour cela, on va faire une étude de cas exhaustive. Cette décomposition va être articulée en deux parties, correspondant aux cas suivants :

1. $w_1\overline{w}_1w_1 = u_1w_2\overline{w}_2w_2u_2$.
2. $u_1w_1\overline{w}_1w_1 = w_2\overline{w}_2w_2u_2$.

Autrement représenté :

<table><tr><td colspan="3">$w_1\overline{w}_1w_1$</td></tr><tr><td>u_1</td><td>$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td>u_2</td></tr></table>

ou

<table><tr><td>u_1</td><td colspan="2">$w_1\overline{w}_1w_1$</td></tr><tr><td colspan="2">$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td>u_2</td></tr></table>

Par symmétrie de la relation $\leftrightsquigarrow$, on voit que ces deux cas couvrent l'ensemble des paires critiques.

Cas 1 : $w_1\overline{w}_1w_1 = u_1w_2\overline{w}_2w_2u_2$

On considère tout d'abord le cas où un motif est complètement inclu dans l'autre, c'est à dire

$$w_1\overline{w}_1w_1 = u_1w_2\overline{w}_2w_2u_2.$$

On va décomposer ce cas en différents sous-cas :

Cas 1.1 : $w_1 = u_1w_2\overline{w}_2w_2a$

<table><tr><td colspan="3">w_1</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr><tr><td>u_1</td><td>$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td>a</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr><tr><td>u_1</td><td>$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td colspan="2">u_2</td></tr></table>

ou

<table><tr><td>$w_1\overline{w}_1$</td><td colspan="3">w_1</td></tr><tr><td>$w_1\overline{w}_1$</td><td>a</td><td>$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td>u_2</td></tr><tr><td colspan="2">u_1</td><td>$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td>u_2</td></tr></table>

– $w_1 = u_1w_2\overline{w}_2w_2a \rightsquigarrow u_1w_2a$
– $u_1w_2u_2 = u_1w_2a \cdot \overline{w}_1 \cdot w_1 \rightsquigarrow^2 u_1w_2a \cdot \overline{u_1w_2a} \cdot u_1w_2a \rightsquigarrow u_1w_2a$

Cas 1.2 : $\overline{w}_1 = aw_2\overline{w}_2w_2b$

<table><tr><td>w_1</td><td colspan="3">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr><tr><td>w_1</td><td>a</td><td>$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td>b</td><td>w_1</td></tr><tr><td colspan="2">u_1</td><td>$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td colspan="2">u_2</td></tr></table>

– $w_1 = \overline{\overline{w}_1} = \overline{aw_2\overline{w}_2w_2b} \rightsquigarrow \overline{aw_2b}$
– $u_1w_2u_2 = w_1 \cdot aw_2b \cdot w_1 \rightsquigarrow^2 \overline{aw_2b} \cdot aw_2b \cdot \overline{aw_2b} \rightsquigarrow \overline{aw_2b}$

Cas 1.3 :

<table><tr><td colspan="2">w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr><tr><td>u_1</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>w_1</td></tr><tr><td>u_1</td><td colspan="2">$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td colspan="2">u_2</td></tr></table>

ou

<table><tr><td>w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr><tr><td>w_1</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>u_2</td></tr><tr><td colspan="2">u_1</td><td colspan="2">$w_2\overline{w}_2w_2$</td><td>u_2</td></tr></table>

Ces deux cas étant duaux l'un de l'autre, on ne va traiter que le premier. Trois configurations sont possibles :

Cas 1.3.1

<table>
<tr><td colspan="4">w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>w_2</td><td>$\overline{w}_2$</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>w_2</td><td>$\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

$$
\begin{aligned}
u_1w_2 \cdot u_2 &= u_1 \cdot w_2 \cdot cw_1 \\
&= u_1a \cdot bc \cdot w_1 \\
&= u_1a \cdot \overline{w}_1 \cdot w_1 \\
&= u_1a \cdot \underline{\overline{u_1w_2\overline{w}_2a} \cdot u_1}w_2\overline{w}_2a \\
&= u_1a \cdot u_1 \cdot ab \cdot \overline{ab} \cdot a \cdot u_1 \cdot ab \cdot \overline{ab}\, a \\
&= u_1 \cdot a\overline{a}a \cdot b\, \overline{u_1ab}\, u_1ab\overline{ab}\, a \\
&\rightsquigarrow u_1ab\, \overline{u_1ab}\, u_1ab \cdot \overline{ab}\, a \\
&\rightsquigarrow u_1 \cdot ab \cdot \overline{ab}\, a \\
&= u_1w_2\overline{w}_2a = w_1
\end{aligned}
$$

Cas 1.3.2

<table>
<tr><td colspan="2">w_1</td><td colspan="4">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>b</td><td>$\overline{w}_2$</td><td>w_2</td><td>c</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td colspan="2">w_2</td><td>$\overline{w}_2$</td><td>w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

$$
\begin{aligned}
u_1w_2 \cdot u_2 &= u_1 \cdot w_2 \cdot c \cdot w_1 \\
&= u_1a \cdot bc \cdot w_1 \\
&= w_1 \cdot bc \cdot w_1 \\
&= \overline{b\overline{w}_2w_2c} \cdot bc \cdot \overline{b\overline{w}_2w_2c} \\
&= \overline{w_2 \cdot c} \cdot w_2 \cdot \overline{b}\, bc\, \overline{w_2 \cdot c} \cdot w_2 \cdot \overline{b} \\
&= \overline{abc}\, a \cdot b\overline{b}b \cdot c\, \overline{abc}\, ab\overline{b} \\
&\rightsquigarrow \overline{abc} \cdot abc \cdot \overline{abc} \cdot ab\overline{b} \\
&\rightsquigarrow \overline{abc} \cdot ab\overline{b} = \overline{w_2c}w_2\overline{b} = \overline{b\overline{w}_2w_2c} = w_1
\end{aligned}
$$

Cas 1.3.3

<table>
<tr><td colspan="3">w_1</td><td colspan="3">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>w_2</td><td>a</td><td>b</td><td>w_2</td><td>c</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td>w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

On commence par poser l'équation

$$u_1\overline{b}\overline{a}\, a = u_1w_2a = w_1 = \overline{\overline{w_1}} = \overline{c}\, \overline{w}_2\, \overline{b} = \overline{c}\, ab\, \overline{b} \tag{4}$$

On y applique le lemme de décomposition, et d ans les deux cas on redécompose la deuxième équation, ce qui nous donne les quatres cas :

1. $u_1 = \overline{c}x \wedge ab\overline{b} = x\overline{b}\overline{a}a$
   (a) $u_1 = \overline{c}x \wedge a = xy \wedge \overline{b}\overline{a}a = yb\overline{b}$. En replaçant a par xy dans la dernière équation on obtient :

   $$\overline{b}\overline{y}\, \overline{x}xy = yb\overline{b}$$

   Comme $|\overline{b}\overline{y}| = |b| + |y| = |yb|$, on en déduit :

   $$\overline{x}xy = \overline{b} \text{ c'est à dire } b = \overline{y}\, \overline{x}x$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_1w_2u_2 &= \bar{c}x\bar{b}\bar{a}cw_1 \\ &= \bar{c}x\bar{x}xy\bar{y}\;\bar{x}c\bar{c}x\bar{x}xy\bar{y}\;\bar{x}xy \\ &\rightsquigarrow^2 \bar{c}xy\bar{y}\;\bar{x}c\bar{c}xy\bar{y}\;\bar{x}xy \\ &\rightsquigarrow \bar{c}xy\bar{y}\;\bar{x}c\bar{c}xy \\ &\rightsquigarrow \bar{c}xy \end{aligned} \qquad \text{et } w_1 = \bar{c}x\bar{x}xy\bar{y}\;\bar{x}xy \rightsquigarrow \bar{c}xy\bar{y}\;\bar{x}xy \rightsquigarrow \bar{c}xy$$

(b) $u_1 = \bar{c}x \wedge x = ay \wedge b\bar{b} = y\bar{b}\bar{a}a$. En passant la deuxième équation par l'opération $\overline{\cdot}$, on a :

$$\bar{a}ay\overline{\bar{b}} = \overline{b\bar{b}} = b\bar{b} = y\bar{b}\bar{a}a.$$

On reconnait l'hypothèse du lemme (iv), qui nous assure[(i)] que $\exists t\ :\ y\bar{b} = \bar{a}a \cdot t\bar{t}$. On a donc :

$$\begin{aligned} u_1w_2u_2 &= u_1w_2cu_1w_2a \\ &= \bar{c}ay\bar{b}\bar{a}c\bar{c}ay\bar{b}\bar{a}a \\ &= \bar{c}a\bar{a}at\bar{t}\bar{a}c\bar{c}a\bar{a}at\bar{t}\bar{a}a \\ &\rightsquigarrow^2 \bar{c}at\bar{t}\bar{a}c\bar{c}at\bar{t}\bar{a}a \\ &\rightsquigarrow \bar{c}at\bar{t}\bar{a}a \end{aligned} \qquad \text{et } w_1 = \bar{c}ay\bar{b}\bar{a}a = \bar{c}a\bar{a}at\bar{t}\bar{a}a \rightsquigarrow \bar{c}at\bar{t}\bar{a}a$$

2. $\bar{c} = u_1x \wedge \bar{b}\bar{a}a = xab\bar{b}$

(a) $\bar{c} = u_1x \wedge \bar{b} = xy \wedge ab\bar{b} = y\bar{a}a$. En remplaçant b on a $a\bar{y}\;\bar{x}xy = y\bar{a}a$. Comme $|a\bar{y}| = |y\bar{a}|$ on en déduit que $a = \bar{x}xy$. On peut donc remplacer :

$$\begin{aligned} u_1w_2u_2 &= u_1w_2cu_1w_2a \\ &= u_1xy\bar{y}\;\bar{x}x\bar{x}\;\bar{u}_1u_1xy\bar{y}\;\bar{x}x\bar{x}xy \\ &\rightsquigarrow^2 u_1xy\bar{y}\;\overline{xu}_1u_1xy\bar{y}\;\bar{x}xy \\ &\rightsquigarrow u_1xy\bar{y}\;\bar{x}\;\bar{u}_1u_1xy \\ &\rightsquigarrow u_1xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{et} \quad w_1 &= u_1w_2a = u_1\bar{b}\bar{a}a \\ &= u_1xy\bar{y}\;\bar{x}x\bar{x}xy \\ &\rightsquigarrow u_1xy\bar{y}\;\bar{x}xy \rightsquigarrow u_1xy \end{aligned}$$

(b) $\bar{c} = u_1x \wedge x = \bar{b}y \wedge \bar{a}a = yab\bar{b}$. On remarque que :

$$yab\bar{b} = \bar{a}a = \overline{\bar{a}a} = \overline{yab\bar{b}} = b\bar{b}\overline{ya}.$$

On applique le lemme (iv) et on a $ya = b\bar{b}t\bar{t}$. Cela nous donne donc :

$$\begin{aligned} u_1w_2u_2 &= u_1w_2cu_1w_2a \\ &= u_1\bar{b}\bar{a}\;\bar{y}b\bar{u}_1u_1\bar{b}\bar{a}a \\ &= u_1\bar{b}t\bar{t}b\bar{b}b\bar{u}_1u_1\bar{b}b\bar{b}\overline{ya} \\ &\rightsquigarrow^2 u_1\bar{b}t\bar{t}b\bar{u}_1u_1\bar{b}t\bar{t}b\bar{b} \\ &\rightsquigarrow u_1\bar{b}t\bar{t}b\bar{b} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{et} \quad w_1 &= u_1\bar{b}\bar{a}a = u_1\bar{b}b\bar{b}\overline{ya} \\ &= u_1\bar{b}b\bar{b}t\bar{t}b\bar{b} \\ &\rightsquigarrow u_1\bar{b}t\bar{t}b\bar{b} \end{aligned}$$

Cas 1.4 :

<table>
<tr><td colspan="2">w_1</td><td>$\bar{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>$\bar{w}_1$</td><td>c</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td colspan="3">$w_2\bar{w}_2w_2$</td><td>u_2</td></tr>
</table>

On peut à nouveau énumérer différentes configurations :

(i). Comme $b\bar{b} = y\bar{b}\bar{a}a$, il est clair que $|b| = |y| + 2|a|$, et donc $|y\bar{b}| = 2|y| + 2|a| \geqslant 2|a|$.

Cas 1.4.1

<table>
<tr><td colspan="2">w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td colspan="3">w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>w_2</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td colspan="2">w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td>w_2</td><td>u_2</td></tr>
</table>

ou

<table>
<tr><td colspan="3">w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>w_2</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td>u_2</td></tr>
</table>

Comme précédement, on voit que ces deux cas sont équivalents. Traitons le premier cas. Posons l'équation

$$\overline{c}\overline{b} = w_1 = dw_2u_2 = (d\overline{d}\overline{c})u_2 \tag{5}$$

On la décompose (parenthèsé comme ci-dessus) :

1. $\overline{c} = d\overline{d}\overline{c}x \wedge u_2 = x\overline{b}$. On déduit de la première équation que $|c| = 2|d| + |c| + |x|$, et donc que $d = x = \mathbb{1}$. Par conséquent $u_2 = \overline{b}$

   $$u_1w_2u_2 = u_1ab\overline{b} = \overline{c}\overline{b}b\overline{b} \rightsquigarrow \overline{c}\overline{b} = w_1.$$

2. $d\overline{d}\overline{c} = \overline{c}x \wedge \overline{b} = xu_2$. En mélangeant ces deux équation et en se rappelant que $ab = \overline{d}\overline{c}$, on arrive à :

   $$da\overline{u}_2\overline{x} = dab = d\overline{d}\overline{c} = \overline{c}x.$$

   Comme $|x| = |\overline{x}|$, on déduit $da\overline{u}_2 = \overline{c} \wedge \overline{x} = x$. En repassant cela dans la seconde équation on remarque que $bu_2 = \overline{u}_2\overline{x}u_2 = \overline{u}_2xu_2 = \overline{u}_2\overline{b} = \overline{bu_2}$. Le lemme (iii) nous permet d'écrire $bu_2 = y\overline{y}$, et donc :

   $$u_1w_2u_2 = u_1abu_2 = dabu_2bu_2 = day\overline{y}y\overline{y} \rightsquigarrow day\overline{y} = dabu_2 = w_1$$

Cas 1.4.2

<table>
<tr><td colspan="2">w_1</td><td colspan="3">$\overline{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>b</td><td>$\overline{w}_2$</td><td>c</td><td>d</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td colspan="2">w_2</td><td>$\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td>u_2</td></tr>
</table>

Ce cas se traite plus rapidement :

$$u_1w_2u_2 = u_1abu_2 = \overline{c}w_2\overline{b}bu_2 = \overline{c}ab\overline{b}bu_2 \rightsquigarrow \overline{c}abu_2 = \overline{c}cdu_2 = \overline{c}c\overline{c}w_2\overline{b} \rightsquigarrow \overline{c}w_2\overline{b} = w_1$$

Cas 2 : $u_1w_1\overline{w}_1w_1 = w_2\overline{w}_2w_2u_2$

On étudie maintenant le cas où les deux motifs sont décalés c'est à dire $u_1w_1\overline{w}_1w_1 = w_2\overline{w}_2w_2u_2$. À nouveau, différents cas se présentent :

Cas 2.1 :

$u_1w_1 = w_2\overline{w}_2w_2x \wedge u_2 = x\overline{w}_1w_1$. On peut tout de suite remarquer que $u_1w_1 \rightsquigarrow w_2x$.

Cas 2.1.1

<table>
<tr><td colspan="2">u_1</td><td colspan="2">w_1</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr>
<tr><td>$w_2\overline{w}_2$</td><td>a</td><td>b</td><td>x</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr>
<tr><td>$w_2\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

$w_2u_2 = abx\overline{x}\overline{b}bx \rightsquigarrow abx = w_2x.$

Cas 2.1.2

<table>
<tr><td colspan="2">u_1</td><td colspan="3">w_1</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td>a</td><td>b</td><td>w_2</td><td>x</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td>w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

$w_2u_2 = \overline{b}\overline{a}x\overline{x}ab\overline{b}b\overline{b}\overline{a}x \rightsquigarrow^2 \overline{b}\overline{a}x = w_2x$

Cas 2.1.3

<table>
<tr><td>u_1</td><td colspan="3">w_1</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>$\overline{w}_2w_2$</td><td>x</td><td>$\overline{w}_1w_1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">w_2</td><td>$\overline{w}_2w_2$</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

$w_2u_2 = u_1ax\overline{x}\,\overline{a}\,\overline{u}_1u_1a\overline{a}a\overline{a}\,\overline{u}_1u_1ax \rightsquigarrow^3 u_1ax = w_2x$

Cas 2.2 :

$w_2\overline{w}_2w_2 = u_1w_1x \wedge \overline{w}_1 = xy \wedge u_2 = yw_1$:

Cas 2.2.1

<table>
<tr><td colspan="2">u_1</td><td>w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>$w_2\overline{w}_2$</td><td>a</td><td>w_1</td><td>x</td><td>y</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>$w_2\overline{w}_2$</td><td colspan="3">w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

$$\begin{array}{rcl}
w_2u_2 & = & aw_1xyw_1 = aw_1\overline{w}_1w_1 \rightsquigarrow aw_1 \\
u_1w_1 & = & w_2\overline{w}_2aw_1 = aw_1x\overline{x}\,\overline{aw_1}aw_1 \\
 & = & a\overline{y}\ conv x x\overline{x}\,\overline{aw_1}aw_1 \\
 & \rightsquigarrow & a\overline{y}\ conv x\,\overline{aw_1}aw_1 \\
 & = & aw_1\overline{aw_1}aw_1 \rightsquigarrow aw_1.
\end{array}$$

Cas 2.2.2

<table>
<tr><td colspan="2">u_1</td><td colspan="2">w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>x</td><td>y</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

Pour résoudre ce cas, on va d'abord prouver le lemme suivant :

Lemme vi:

$$\forall a, b, c, d \in X^*, \overline{a}ab = cd\overline{d} \Rightarrow abd \leftrightsquigarrow acd. \qquad \blacksquare$$

Preuve On va procéder par induction sur a, et faire une étude de cas :

– Si $a = \mathbb{1}$ alors $b = cd\overline{d}$ et donc $abd = cd\overline{d}d \rightsquigarrow cd = acd$;
– sinon, décomposons :

1. <table><tr><td>$\overline{a}a$</td><td colspan="2">b</td></tr><tr><td>$\overline{a}a$</td><td>x</td><td>$d\overline{d}$</td></tr><tr><td colspan="2">c</td><td>$d\overline{d}$</td></tr></table>

$$\begin{array}{rcl} abd & = & axd\overline{d}d \rightsquigarrow axd \\ acd & = & a\overline{a}axd \rightsquigarrow axd. \end{array}$$

2. <table><tr><td>$\overline{a}$</td><td colspan="2">a</td><td colspan="2">b</td></tr><tr><td>$\overline{a}$</td><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>$\overline{d}$</td></tr><tr><td colspan="2">c</td><td colspan="2">d</td><td>$\overline{d}$</td></tr></table>

$$\begin{array}{rcl} abd & = & xyz\overline{d}d = xd\overline{d}d \rightsquigarrow xd = xyz \\ acd & = & a\overline{a}xyz = a\overline{a}az \rightsquigarrow az = xyz. \end{array}$$

3. <table><tr><td>$\overline{a}$</td><td colspan="3">a</td><td>b</td></tr><tr><td>$\overline{a}$</td><td>x</td><td>d</td><td>y</td><td>b</td></tr><tr><td colspan="2">c</td><td>d</td><td colspan="2">$\overline{d}$</td></tr></table>

$$\begin{array}{rcl} abd & = & x\overline{b}\overline{y}yb\overline{b}\overline{y} \rightsquigarrow x\overline{b}\overline{y} \\ acd & = & x\overline{b}\overline{y}y\overline{y}yb\overline{x}x\overline{b}\overline{y} \rightsquigarrow x\overline{b}\overline{y}yb\overline{x}x\overline{b}\overline{y} \rightsquigarrow x\overline{b}\overline{y}. \end{array}$$

4. <table><tr><td colspan="2">$\overline{a}$</td><td>a</td><td colspan="2">b</td></tr><tr><td>c</td><td>x</td><td>a</td><td>y</td><td>$\overline{d}$</td></tr><tr><td>c</td><td colspan="3">d</td><td>$\overline{d}$</td></tr></table>

$$\begin{array}{rcl} abd & = & \overline{x}\,\overline{c}y\overline{y}cx\overline{x}x\overline{x}\,\overline{c}y \rightsquigarrow \overline{x}\,\overline{c}y\overline{y}cx\overline{x}\,\overline{c}y \rightsquigarrow \overline{x}\,\overline{c}y \\ acd & = & \overline{xc}cx\overline{x}\,\overline{c}y \rightsquigarrow \overline{x}\,\overline{c}y. \end{array}$$

5. <table><tr><td colspan="2">$\overline{a}$</td><td colspan="2">a</td><td>b</td></tr><tr><td>c</td><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>b</td></tr><tr><td>c</td><td colspan="2">d</td><td colspan="2">$\overline{d}$</td></tr></table>

Ce dernier cas est plus subtil : on remarque que

$$\overline{z}zb = \overline{z}\overline{d} = \overline{z}\,\overline{y}\,\overline{x} = \overline{a}\,\overline{x} = cx\overline{x}.$$

– Si $y = \mathbb{1}$, alors $\overline{a} = cd \wedge \overline{d} = ab$; d'où l'on peut déduire $b = c = \mathbb{1}$ et donc $abd = acd$.
– Sinon, $|y| > 0$ et donc $|z| < |z| + |y| = |a|$, et l'on peut appliquer l'hypothèse d'induction, qui nous indique que $zbx \leftrightsquigarrow zcx$. Or $abd = y \cdot zbx \cdot y$ et $acd = y \cdot zcx \cdot y$, et par conséquent $abd \leftrightsquigarrow acd$. $\square$

Avec ce lemme, la preuve devient aisée : en effet on peut remarquer que

$$\begin{cases} aw_1\overline{w}_1 = abcxy = \overline{w}_2w_2y \\ u_1w_1 = w_2aw_1 \\ w_2u_2 = w_2yw_1. \end{cases}$$

On applique donc le lemme qui nous donne exactement le résultat attendu.

Cas 2.2.3

<table>
<tr><td>u_1</td><td colspan="3">w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>$\overline{w}_2$</td><td>b</td><td>x</td><td>y</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">w_2</td><td>$\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

$$\begin{aligned} w_2u_2 \quad &= \quad w_2yw_1 = b\ xy\ a\overline{w}_2b \\ &= \quad b\overline{b}w_2\overline{a}a\overline{a}\overline{u}_1b = b\overline{b}bx\overline{a}a\overline{a}\ \overline{u}_1b \\ &\rightsquigarrow^2 \quad bx\overline{a}\overline{u}_1b = u_1a\overline{w}_2b = u_1w_1. \end{aligned}$$

Cas 2.2.4

<table>
<tr><td>u_1</td><td colspan="2">w_1</td><td colspan="3">$\overline{w}_1$</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>w_2</td><td>y</td><td>w_1</td></tr>
<tr><td colspan="2">w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td>w_2</td><td colspan="2">u_2</td></tr>
</table>

Autrement formulé :

$$\begin{cases} w_1 = ab = \overline{yw_2c} \\ w_2 = u_1a = \overline{c}\overline{b} \\ u_2 = yw_1 \end{cases}$$

On va décomposer la seconde équation.

- $\overline{c} = u_1x \wedge a = x\overline{b}$: dans ce cas la première éqution devient (en appliquant $\overline{\cdot}$) $\overline{b} \cdot b\overline{x} = \overline{x}\,\overline{u}_1u_1x \cdot \overline{b} \cdot y$. On peut donc appliquer le lemme (v) et écrire

$$\begin{cases} b\overline{x} = tsy \\ \overline{x}\,\overline{u}_1u_1x = st \\ \overline{x}\,\overline{u}_1u_1x\overline{b} = \overline{b}ts. \end{cases}$$

  On remarque alors que la dernière équation peut se réécrire :

$$\overline{x}\,\overline{u}_1u_1 \cdot x\overline{b} = \overline{x}\,\overline{u}_1u_1\overline{tsy} = \overline{x}\,\overline{u}_1u_1\overline{y} \cdot \overline{s}\overline{t} = \overline{b} \cdot ts.$$

  Cela nous permet d'établir que $ts = \overline{ts}$, et donc que pour un certain p on a $ts = p\overline{p}$. De là :

$$w_2u_2 = u_1\overline{y}p\overline{p}y\overline{y}p\overline{p}b \rightsquigarrow u_1\overline{y}p\overline{p}b = u_1x\overline{b}b = u_1w_1.$$

- $u_1 = \overline{c}x \wedge \overline{b} = xa$: ici la première équation devient, après passage au converse, $xa \cdot \overline{a} = c\overline{c} \cdot xa \cdot y$. On applique à nouveau le même lemme pour obtenir

$$\begin{cases} \overline{a} = tsy \\ c\overline{c} = st \\ c\overline{c}xa = xats. \end{cases}$$

  La dernière équation peut se réécrire $c\overline{c}x\overline{y} \cdot \overline{s}\overline{t} = xa \cdot ts$, d'où l'on déduit $ts = \overline{ts}$, et donc $ts = p\overline{p}$ pour un certain p. On arrive donc à la réduction suivante :

$$w_2u_2 = \overline{c}x\overline{y}p\overline{p}y\overline{y}p\overline{p}p\overline{p}yx \rightsquigarrow \overline{c}x\overline{y}p\overline{p}p\overline{p}yx = u_1w_1.$$

Cas 2.3 :

$w_1 = xu_2 \wedge u_1w_1\overline{w}_1x = w_2\overline{w}_2w_2$:

Cas 2.3.1

<table>
<tr><td colspan="2">u_1</td><td>$w_1\overline{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr>
<tr><td>$w_2\overline{w}_2$</td><td>a</td><td>$w_1\overline{w}_1$</td><td>x</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td>$w_2\overline{w}_2$</td><td colspan="3">w_2</td><td>u_2</td></tr>
</table>

$$\begin{aligned} w_2u_2 &= aw_1\overline{w}_1xu_2 = aw_1\overline{w}_1w_1 \rightsquigarrow aw_1 \\ u_1w_1 &= w_2\overline{w}_2aw_1 = aw_1\overline{w}_1x\bar{x}w_1\overline{w}_1\bar{a}aw_1 \\ &= aw_1\overline{w}_1x\bar{x}xu_2\overline{w}_1\bar{a}aw_1 \rightsquigarrow aw_1\overline{w}_1xu_2\overline{w}_1\bar{a}aw_1 \\ &= aw_1\overline{w}_1w_1\overline{w}_1\bar{a}aw_1 \rightsquigarrow^2 aw_1. \end{aligned}$$

Cas 2.3.2

<table>
<tr><td colspan="2">u_1</td><td colspan="2">w_1</td><td>$\overline{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>$\overline{w}_1$</td><td>x</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td colspan="3">w_2</td><td>u_2</td></tr>
</table>

$$\begin{aligned} u_1w_1 &= w_2abc = w_2\overline{w}_2c = c\bar{u}_2\,\bar{x}x\bar{x}xu_2\bar{c}c \\ &\rightsquigarrow c\bar{u}_2\,\bar{x}xu_2\bar{c}c = c\overline{w}_1bc\bar{c}c \rightsquigarrow c\overline{w}_1bc = c\overline{w}_1xu_2 = w_2u_2. \end{aligned}$$

Cas 2.3.3

<table>
<tr><td colspan="2">u_1</td><td>w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td>a</td><td>w_1</td><td>b</td><td>c</td><td>x</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td>w_2</td><td colspan="3">$\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td>u_2</td></tr>
</table>

Differément exprimé :

$$\begin{cases} u_1 = w_2a \\ w_2 = \bar{b}\overline{w}_1\,\bar{a} = cx \\ w_1 = \bar{c}\bar{b} = xu_2 \end{cases}$$

On commence par décomposer l'équation :

$$\bar{b}bc\bar{a} = cx.$$

- $\bar{b}bc = ct \wedge x = t\bar{a}$: on décompose à nouveau la première équation :
  - $\bar{b}b = cy \wedge t = yc$: on décompose une dernière fois :
    - $\bar{b} = cz \wedge y = zb = z\bar{z}\bar{c}$: dans ce cas l' équation définissant w_1 devient

      $$\bar{c}cz = z\bar{z}\bar{c}cconvau_2.$$

      Une analyse rapide des tailles des deux côtés de l'équation nous assure que $z = a = u_2 = \mathbb{1}$, et par la suite que $\bar{b} = cz = c$ et $y = zb = \bar{c}$. Subséquement : $u_1w_1 = w_2aw_1 = cyc\bar{a}a\bar{c}c = c\bar{c}c\bar{c}c \rightsquigarrow c\bar{c}c = cyc\bar{a}u_2 = w_2u_2$.
    - $b = zy \wedge c = \bar{b}z = \bar{y}\bar{z}z$: $\bar{c}\bar{b} = xu_2$ devient $\bar{z}zy\bar{y}\cdot\bar{z} = y\bar{y}\,\bar{z}z\cdot u_2$. On en déduit que $y\bar{y}\,\bar{z}z = p\bar{p}$, c'est à dire $xc = p\bar{p}$. Donc $u_1w_1 = w_2aw_1 = cp\overline{pa}ap\overline{pa}u_2 \rightsquigarrow cp\overline{pa}u_2 = cyc\bar{a}u_2 = w_2u_2$.
  - $c = \bar{b}by \wedge c = yt$: l'équation sur w_1 nous dit que $\bar{t}y\bar{b} = t\bar{a}u_2$ et donc en particulier que $\bar{t} = t$, c'est à dire $t = p\bar{p}$. On en déduit :

    $$u_1w_1 = cdadu_2 = cp\bar{p}\,\bar{a}p\bar{p}\,\bar{a}u_2 \rightsquigarrow cp\bar{p}\,\bar{a}u_2 = cxu_2 = w_2u_2.$$

- $c = \bar{b}bct \wedge \bar{a} = tx$: ici la première équation nous indique que $b = t = \mathbb{1}$. On en déduit immédiatemment :

  $$u_1w_1 = cxaxu_2 = c\bar{a}a\bar{a}u_2 \rightsquigarrow c\bar{a}u_2 = cxu_2 = w_2u_2.$$

Cas 2.3.4

<table>
<tr><td>u_1</td><td colspan="2">w_1</td><td colspan="2">$\overline{w}_1$</td><td colspan="2">w_1</td></tr>
<tr><td>u_1</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>x</td><td>u_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">w_2</td><td colspan="2">$\overline{w}_2$</td><td colspan="2">w_2</td><td>u_2</td></tr>
</table>

Ce qui signifie :

$$\begin{cases} w_1 = ab = xu_2 = \overline{d}\overline{c} \\ w_2 = u_1 a = dx = \overline{c}\overline{b}. \end{cases}$$

On décompose $ab = xu_2$.

- $a = xy \wedge u_2 = yb$: on peut remarquer que $u_1 xy = dx$ et donc après application du converse $\overline{x}\overline{d} = \overline{y}\,\overline{x}\,\overline{u}_1$, on peut donc appliquer le lemme (v). On obtient

$$\begin{cases} \overline{d}{=}\overline{t}\overline{s}\,\overline{u}_1 \text{ soit } d{=}u_1 st \\ \overline{y}{=}\overline{s}\overline{t} \quad \text{soit } x{=}ts \\ \overline{y}\,\overline{x}{=}\overline{x}\overline{t}\overline{s} \text{ soit } xy{=}stx. \end{cases}$$

  En remplaçant dans l'équation $xu_2 = \overline{d}\overline{c}$ on a $xyb = st \cdot xb = \overline{t}\overline{s} \cdot \overline{u}_1\overline{c}$ et donc $st = \overline{st}$ soit $st = z\overline{z}$. Cela donne :

$$w_2 u_2 = u_1 z\overline{z}z\overline{z}xb \rightsquigarrow u_1 z\overline{z}xb = u_1 xyb = u_1 w_1.$$

- $x = ay \wedge b = yu_2$: on a $u_1 a = dx = day$, donc en passant par le converse et en appliquant le même lemme que ci-dessus on obtient :

$$\begin{cases} \overline{u}_1{=}\overline{t}\overline{s}\,\overline{d} \text{ soit } u_1{=}dst \\ \overline{y}{=}\overline{s}\overline{t} \quad \text{soit } y{=}ts \\ \overline{y}\,\overline{a}{=}\overline{a}\overline{t}\overline{s} \text{ soit } ay{=}sta. \end{cases}$$

  Or $u_1 a = \overline{c}\overline{b}$ donc $dsta = day = \overline{c}\,\overline{u}_2\,\overline{y}$, d'où l'on infère $y = \overline{y}$ et donc $y = z\overline{z}$. Par conséquent :

$$u_1 w_1 = dstayu_2 = dayyu_2 = daz\overline{z}z\overline{z}u_2 \rightsquigarrow dayu_2 = w_2 u_2.$$