

Contrôle continu : Machines de Turing

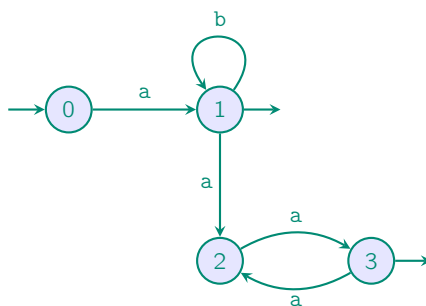
Consignes – Pour chaque question, on attend la description d'une machine de Turing, ainsi qu'une explication de son fonctionnement. Merci de préciser le type de mémoire utilisé par vos machines : nombre de rubans, ruban infini/bi-infini... Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. **7 points**

Écrire une machine de Turing qui reconnaît le langage suivant sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

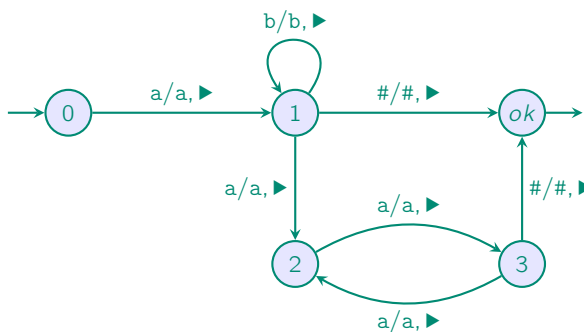
$$L_1 := \llbracket ab^* (aa)^* \rrbracket$$

Solution: On suppose
Ce langage ϵ



En effet, le mot ϵ est accepté. Ensuite, on peut lire un nombre arbitraire de b . Si le mot ϵ on peut lire de a . Si on en lit un nombre (non nul et) pair, on arrive dans l'état 3 et on accepte. Si on en lit un nombre impair, on arrive dans l'état 2 et on rejette.

On peut ensuite traduire cet automate en machine de Turing :



Exercice 2. 7 points

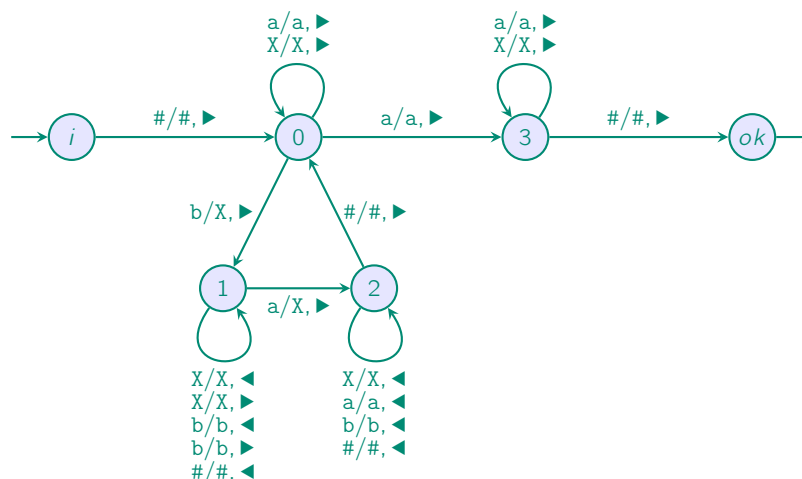
Écrire une machine de Turing qui reconnaît le langage suivant sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L_2 := \{w \mid |w|_a > |w|_b\}$$

Solution : On suppose

La machine qui suit exécute l'algorithme (non-déterministe) suivant :

1. On lit le mot d'entrée, en ignorant le a . (état 0)
2. Lorsque l'on voit un b : (état
 - a) on le remplace par le symbole x ;
 - b) on écrit a ;
 - c) on rembobine le ruban, pour revenir à l'état 0 ;
 - d) on recommence de l'étape 1.
3. Quand on pense avoir terminé, on scanne le ruban pour vérifier que : (état 3)
 - a) il ne reste plus de b ;
 - b) et il reste au moins un a .
4. À la fin de cette vérification, on accepte le mot.

**Exercice 3.** 7 points

Écrire une machine de Turing qui reconnaît le langage suivant sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

$$L_3 := \{w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$$

Solution : On suppose

La machine qui suit réalise l'algorithme suivant :

1. On scanne le mot, en ignorant le b et le c, ainsi que le x que l'on va ajouter plus bas ; (état 0)
2. En voyant un a :
 - a) on le remplace par x ;
 - b) on scanne le mot pour trouver un b que l'on remplace par x ; (état 1) ;
 - c) on scanne le mot pour trouver un c que l'on remplace par x ; (état 2) ;
 - d) on rembobine le ruban ; (état 3) ;
 - e) on retourne à l'étape 1.
3. Lorsque qu'on voit le premier # à droite :
 - a) on rembobine le mot, en vérifiant qu'on s'est dit qu'il ne restait pas de x sur le ruban ; (état 4)
 - b) quand on revient à la première case du ruban, on accepte

