TD 3 - Ensembles dénombrables et équivalence de modèles

Exercice 1. Stablité de la notion de dénombrabilité

Question 1. Montrer que si $f : X \to \mathbb{N}$ est une bijection, alors :

$$\forall x \in X,\ f(x) = \# \{y \in X \mid f(y) < f(x)\} .$$

(Où l'on note $\#A$ le cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble fini A.)

Question 2. Montrer que si $X \subseteq Y$ sont deux ensembles infinis, et que Y est dénombrable, alors X est dénombrable.

Question 3. Montrer que si X et Y sont deux ensembles dénombrables, alors $X \cup Y$ est dénombrable.

Question 4. Montrer que si X et Y sont deux ensembles dénombrables, alors $X \times Y$ est dénombrable.

Exercice 2. Mots

Question 1. Montrer que pour tout alphabet **fini** A, l'ensemble $A^\star$ des mots sur A est dénombrable.

Question 2. Montrer que si X est dénombrable, alors $X^\star$, l'ensemble des séquences finies d'éléments de X, est également dénombrable.

Exercice 3. Ensembles dénombrables

Montrer que les ensembles suivants sont dénombrables. On pourra utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des nombres rationnels) et $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des entiers relatifs) sont tous deux dénombrables.

Question 1. L'ensemble $I_{\mathbb{Q}}$ des intervalles bornés non-vides dont les deux extrémités sont rationnelles. On considèrera la possibilité d'inclure (intervalle fermé) ou d'exclure (intervalle ouvert) chaque extrémité de l'intervalle.

Question 2. L'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers.

Exercice 4. Machine lente

Une machine lente est une structure $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F\rangle$, où

- Q est un ensemble fini d'états, avec $q_0 \in Q$ un état initial et $F \subseteq Q$ un ensemble d'états acceptants ;
- Σ est un alphabet d'entrée ne contenant pas le symbole blanc #, et $\Sigma \cup \{\#\} \subseteq \Gamma$ est un alphabet de travail ;
- $\Delta \subseteq Q \times \Gamma \times (\Gamma + \{◀, ▶\}) \times Q$ est une relation de transition.

L'exécution d'une machine lente est définie par la relation de transition entre configurations. Soit $ux\,q\,av$ une configuration, avec $u, v \in \Gamma^\star$, $x, a \in \Gamma$, et $q \in Q$:

- si $q \xrightarrow{a/b} p \in \Delta$ (avec $b \in \Gamma$), alors $ux\,q\,av \to_{\mathcal{M}} ux\,p\,bv$
- si $q \xrightarrow{a/◀} p \in \Delta$, alors $ux\,q\,av \to_{\mathcal{M}} u\,p\,xav$
- si $q \xrightarrow{a/▶} p \in \Delta$, alors $ux\,q\,av \to_{\mathcal{M}} uxa\,p\,v$.

Le langage reconnu par une telle machine est l'ensemble

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) := \{w \in \Sigma^\star \mid \exists u, v \in \Gamma^\star,\ \exists q_f \in F :\ q_0\,w \to^*_{\mathcal{M}} u\,q_f\,v\} .$$

Question. Montrer que les machines lentes sont équivalentes aux machines de Turing.