Algèbres de Kleene :
entre sémantique des programmes et automatisation des mathématiques

Inter'Actions en Mathématiques 2016

Paul Brunet
Équipe Plume – Univ Lyon, UCB Lyon 1, CNRS, ENS de Lyon, LIP

23-27 mai 2016

Motivation : Algèbre de relations

Soit O un ensemble quelconque, et R, S et T trois relations binaires sur O.

$$\mathrm{Rel} \models 1 \cup R^\star \cdot S \subseteq (R \cup S)^\star$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cap S) \cdot T \subseteq (R \cdot T) \cap (S \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cdot S) \cap T \subseteq R \cdot (S \cap R^\smile \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \models (1 \cap (R \cdot S))^\star \subseteq R \cdot S \cdot R$$

Opérateurs relationnels

relation identité	:	1
relation vide	:	0
composition	:	$R \cdot S$
union	:	$R \cup S$
intersection	:	$R \cap S$
réciproque	:	$R^\smile$
clôture réflexive transitive	:	$R^\star$

Motivation : Algèbre de relations

Soit O un ensemble quelconque, et R, S et T trois relations binaires sur O.

$$\mathrm{Rel} \models 1 \cup R^\star \cdot S \subseteq (R \cup S)^\star$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cap S) \cdot T \subseteq (R \cdot T) \cap (S \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cdot S) \cap T \subseteq R \cdot (S \cap R^\smile \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \not\models (1 \cap (R \cdot S))^\star \subseteq R \cdot S \cdot R$$

Opérateurs relationnels

relation identité	:	1
relation vide	:	0
composition	:	$R \cdot S$
union	:	$R \cup S$
intersection	:	$R \cap S$
réciproque	:	$R^\smile$
clôture réflexive transitive	:	$R^\star$

Motivation : Algèbre de relations

Soit O un ensemble quelconque, et R, S et T trois relations binaires sur O.

$$\mathrm{Rel} \models 1 \cup R^\star \cdot S \subseteq (R \cup S)^\star$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cap S) \cdot T \subseteq (R \cdot T) \cap (S \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cdot S) \cap T \subseteq R \cdot (S \cap R^\smile \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \not\models (1 \cap (R \cdot S))^\star \subseteq R \cdot S \cdot R$$

Opérateurs relationnels

relation identité	:	1
relation vide	:	0
composition	:	$R \cdot S$
union	:	$R \cup S$
intersection	:	$R \cap S$
réciproque	:	$R^\smile$
clôture réflexive transitive	:	$R^\star$

Facile mais fastidieux

Motivation : Algèbre de relations

Soit O un ensemble quelconque, et R, S et T trois relations binaires sur O.

$$\mathrm{Rel} \models 1 \cup R^\star \cdot S \subseteq (R \cup S)^\star$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cap S) \cdot T \subseteq (R \cdot T) \cap (S \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \models (R \cdot S) \cap T \subseteq R \cdot (S \cap R^\smile \cdot T)$$

$$\mathrm{Rel} \not\models (1 \cap (R \cdot S))^\star \subseteq R \cdot S \cdot R$$

Opérateurs relationnels

relation identité	:	1
relation vide	:	0
composition	:	$R \cdot S$
union	:	$R \cup S$
intersection	:	$R \cap S$
réciproque	:	$R^\smile$
clôture réflexive transitive	:	$R^\star$

Facile mais fastidieux : **automatisation ?**

Plan

Plan

Mots et langages

Soit $\Sigma = \{a, b, ...\}$ un **alphabet** fini.

Un **mot** u est une suite finie de lettres choisies dans Σ.
Autrement dit : $u ::= \varepsilon \mid au$.

La **concaténation** de deux mots u, v est notée $u \cdot v$, ou simplement uv.

$\langle \Sigma^\star, \cdot \rangle$ est le **monoïde libre** engendré par Σ.

Un **langage** L est un ensemble de mots : $L \subseteq \Sigma^\star$.

Expressions et langages rationnels

Expressions rationnelles

$$e, f \in \mathrm{Reg}_\Sigma ::= 0 \mid 1 \mid a \in \Sigma \mid e \cdot f \mid e + f \mid e^\star$$

Expressions et langages rationnels

Expressions rationnelles

$$e, f \in \mathrm{Reg}_\Sigma ::= 0 \mid 1 \mid a \in \Sigma \mid e \cdot f \mid e + f \mid e^\star$$

Langages rationnels

$\mathrm{L}(e)$ est un ensemble de mots sur Σ.

$$\mathrm{L}(0) \coloneqq \emptyset \qquad \mathrm{L}(1) \coloneqq \{\varepsilon\}$$

$$\mathrm{L}(a) \coloneqq \{a\} \qquad \mathrm{L}(e \cdot f) \coloneqq \{uv \mid u \in \mathrm{L}(e) \text{ et } v \in \mathrm{L}(f)\}$$

$$\mathrm{L}(e + f) \coloneqq \mathrm{L}(e) \cup \mathrm{L}(f) \qquad \mathrm{L}(e^\star) \coloneqq \{u_1 \dots u_n \mid \forall i, u_i \in \mathrm{L}(e)\}$$

Expressions et langages rationnels

Expressions rationnelles

$$e, f \in \mathrm{Reg}_\Sigma ::= 0 \mid 1 \mid a \in \Sigma \mid e \cdot f \mid e + f \mid e^\star$$

Langages rationnels

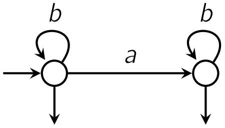
$\mathrm{L}(e)$ est un ensemble de mots sur Σ.

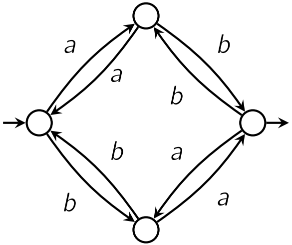
$$\mathrm{L}(0) := \emptyset \qquad \mathrm{L}(1) := \{\varepsilon\}$$
$$\mathrm{L}(a) := \{a\} \qquad \mathrm{L}(e \cdot f) := \{uv \mid u \in \mathrm{L}(e) \text{ et } v \in \mathrm{L}(f)\}$$
$$\mathrm{L}(e + f) := \mathrm{L}(e) \cup \mathrm{L}(f) \qquad \mathrm{L}(e^\star) := \{u_1 \dots u_n \mid \forall i, u_i \in \mathrm{L}(e)\}$$

Exemples

$$\mathrm{L}(a \cdot (b + c)) = \{ab, ac\} \qquad \mathrm{L}(a \cdot 0) = \emptyset$$
$$\mathrm{L}(a^\star) = \{\varepsilon, a, aa, \dots\} = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Automates

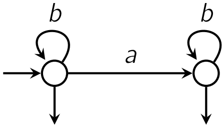


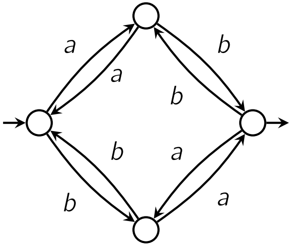


Automates

Théorème

L'équivalence d'automates est décidable.





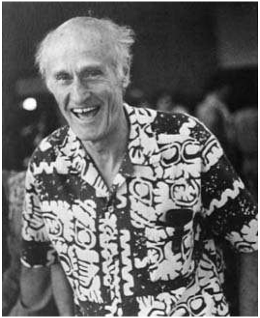
Automates

Théorème

L'équivalence d'automates est décidable.

Théorème de Kleene

Un langage est rationnel si et seulement si il existe un automate à états finis le reconnaissant.



Stephen Cole Kleene

Automates

Théorème

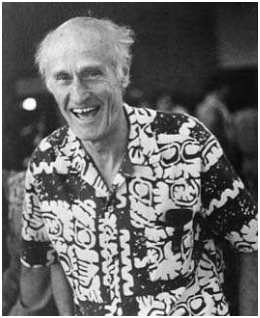
L'équivalence d'automates est décidable.

Théorème de Kleene

Un langage est rationnel si et seulement si il existe un automate à états finis le reconnaissant.

Corollaire

Il existe un algorithme qui, étant données deux expressions rationnelles e et f, décide si $\mathrm{L}(e) = \mathrm{L}(f)$.



Stephen Cole Kleene

Plan

Algèbre de Kleene

Une algèbre Kleene est une structure algébrique $\langle K, +, \cdot, ^{\star}, 0, 1\rangle$ telle que

John Horton Conway

Algèbre de Kleene

Une algèbre Kleene est une structure algébrique $\langle K, +, \cdot, ^\star, 0, 1\rangle$ telle que

- $\langle K, +, \cdot, 0, 1\rangle$ est un demi anneau idempotent.
  - $\langle K, +, 0\rangle$ est un monoïde commutatif idempotent ;
  - $\langle K, \cdot, 1\rangle$ est un monoïde,
  - $\cdot$ est distributif par rapport à $+$,
  - 0 est absorbant pour 1.

John Horton Conway

Algèbre de Kleene

Une algèbre Kleene est une structure algébrique $\langle K, +, \cdot, ^\star, 0, 1\rangle$ telle que

- $\langle K, +, \cdot, 0, 1\rangle$ est un demi anneau idempotent.
  - $\langle K, +, 0\rangle$ est un monoïde commutatif idempotent ;
  - $\langle K, \cdot, 1\rangle$ est un monoïde,
  - $\cdot$ est distributif par rapport à $+$,
  - 0 est absorbant pour 1.

  On note $\leqslant$ la relation d'ordre définie par :

$$(a \leqslant b) \coloneqq (a + b = b)\,.$$

John Horton Conway

Algèbre de Kleene

Une algèbre Kleene est une structure algébrique $\langle K, +, \cdot, ^\star, 0, 1\rangle$ telle que

- $\langle K, +, \cdot, 0, 1\rangle$ est un demi anneau idempotent.
  - $\langle K, +, 0\rangle$ est un monoïde commutatif idempotent ;
  - $\langle K, \cdot, 1\rangle$ est un monoïde,
  - $\cdot$ est distributif par rapport à $+$,
  - 0 est absorbant pour 1.

  On note $\leqslant$ la relation d'ordre définie par :

  $$(a \leqslant b) \coloneqq (a + b = b)\,.$$

- L'étoile vérifie les lois suivantes :

  $$1 + a \cdot a^\star \leqslant a^\star$$

  $$b + a \cdot x \leqslant x \Rightarrow a^\star \cdot b \leqslant x$$

  (+ symétriques)

John Horton Conway

Algèbre de Kleene

Une algèbre Kleene est une structure algébrique $\langle K, +, \cdot, ^\star, 0, 1\rangle$ telle que

- $\langle K, +, \cdot, 0, 1\rangle$ est un demi anneau idempotent.
  - $\langle K, +, 0\rangle$ est un monoïde commutatif idempotent ;
  - $\langle K, \cdot, 1\rangle$ est un monoïde,
  - $\cdot$ est distributif par rapport à $+$,
  - 0 est absorbant pour 1.

  On note $\leqslant$ la relation d'ordre définie par :

  $$(a \leqslant b) \coloneqq (a + b = b)\,.$$

- L'étoile vérifie les lois suivantes :

  $$1 + a \cdot a^\star \leqslant a^\star$$
  $$b + a \cdot x \leqslant x \Rightarrow a^\star \cdot b \leqslant x$$

  (+ symétriques)

  Dans la plupart des cas :

  $$e^\star = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^n.$$

John Horton Conway

Exemple : Lang

Soit A un alphabet.

- $K = \mathcal{P}(A^\star)$,
- $L \cdot M = \{uv \mid u \in L, v \in M\}$,
- $L + M = L \cup M$,
- $L^\star = \{u_1 \dots u_n \mid u_i \in L\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$,
- $0 = \emptyset$,
- $1 = \{\varepsilon\}$.

Exemple : Rel

Soit O un ensemble.

- $K = \mathcal{P}(O \times O)$,
- $R \cdot S = \{(x, y) \mid \exists k, x\, R\, k \text{ et } k\, S\, y\}$,
- $R + S = R \cup S$,
- $$\begin{aligned} R^\star &= \{(x, y) \mid x = y \text{ ou } \exists k_1, \ldots, k_n \ :\ x\, R\, k_1\, R \ldots R\, k_n\, R\, y\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n, \end{aligned}$$
- $0 = \emptyset$,
- $1 = \{(x, x) \mid x \in O\}$.

Équivalence d'expressions

Tout est équivalent

$$\forall O, \forall a, b, c, ... \in \mathcal{P}\left(O \times O\right), e = f?$$

- $\mathrm{Rel} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene relationnelles.

Équivalence d'expressions

Tout est équivalent

$$\forall O, \forall a, b, c, \ldots \in \mathcal{P}\left(O \times O\right), e = f?$$

- $\mathrm{Rel} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene relationnelles.

$$\mathrm{Rel} \models e = f \Longleftrightarrow \mathsf{L}\left(e\right) = \mathsf{L}\left(f\right)$$

Équivalence d'expressions

Tout est équivalent

$$\forall A, \forall a, b, c, ... \in \mathcal{P}\left(A^{\star}\right), e = f?$$

- $\mathrm{Rel} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene relationnelles.
- $\mathrm{Lang} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene de langages.

$$\mathrm{Rel} \models e = f \Longleftrightarrow \mathsf{L}\left(e\right) = \mathsf{L}\left(f\right) \Longleftrightarrow \mathrm{Lang} \models e = f$$

Équivalence d'expressions

Tout est équivalent

$$\forall K, \forall a, b, c, \ldots \in K, e = f?$$

- $\mathrm{Rel} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene relationnelles.
- $\mathrm{Lang} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene de langages.
- $\mathrm{KA} \vdash e = f$: loi des algèbres de Kleene,
  (i.e. conséquence logique des axiomes de KA).

Dexter Kozen

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{KA} \vdash e = f & & \\ & & \Updownarrow & & \\ \mathrm{Rel} \models e = f & \Longleftrightarrow & \mathsf{L}(e) = \mathsf{L}(f) & \Longleftrightarrow & \mathrm{Lang} \models e = f \end{array}$$

Équivalence d'expressions

Tout est équivalent, et tout est décidable

$$\forall K, \forall a, b, c, \ldots \in K, e = f?$$

- $\mathrm{Rel} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene relationnelles.
- $\mathrm{Lang} \models e = f$: loi des algèbres de Kleene de langages.
- $\mathrm{KA} \vdash e = f$: loi des algèbres de Kleene, (i.e. conséquence logique des axiomes de KA).

Dexter Kozen

$$\mathrm{KA} \vdash e = f$$

$$\Updownarrow$$

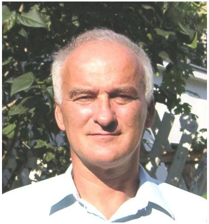
$$\mathrm{Rel} \models e = f \Longleftrightarrow \mathsf{L}(e) = \mathsf{L}(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Lang} \models e = f$$

décidable

Plan

Converse

Miroir et Réciproque



Zoltan Ésik

Soit $L \subseteq \Sigma^\star$:

$$L^{\smile} := \{a_n \dots a_1 \mid a_1 \dots a_n \in L\}$$

Soit $R \subseteq O \times O$:

$$x\, R^{\smile}\, y \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} y\, R\, x$$

1. Peut on encoder le miroir et la réciproque dans la même **théorie** ?
2. Quels **axiomes** faut il ajouter à KA pour modéliser ces opérateurs ?
3. Ces théories sont elles **complètes** ?
4. Sont elles **décidables** ?

Miroir

Théorème

Les langages rationnels sont clos par miroir.

Miroir

Théorème

Les langages rationnels sont clos par miroir.

Mais :

$$\mathrm{Lang} \not\models a^{\smile} = a \qquad\qquad \mathsf{L}\left(a^{\smile}\right) = \{a\} = \mathsf{L}\left(a\right).$$

Miroir

Théorème

Les langages rationnels sont clos par miroir.

Mais :

$$\mathrm{Lang} \not\models a^{\smile} = a \qquad\qquad \mathsf{L}\left(a^{\smile}\right) = \{a\} = \mathsf{L}\left(a\right).$$

$$\begin{array}{ccll} \Sigma & \to & \boldsymbol{\Sigma} & := \Sigma \cup \{a' \mid a \in \Sigma\} \\ \mathrm{Reg}^{\smile}_{\Sigma} & \to & \mathrm{Reg}_{\boldsymbol{\Sigma}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (e+f)^{\smile} \mapsto e^{\smile} + f^{\smile} & 1^{\smile} \mapsto 1 & 0^{\smile} \mapsto 0 \\ (e \cdot f)^{\smile} \mapsto f^{\smile} \cdot e^{\smile} & a^{\smile} \mapsto a' & a'^{\smile} \mapsto a \\ (e^{\star})^{\smile} \mapsto \left(e^{\smile}\right)^{\star} & e^{\smile\smile} \mapsto e & \end{array}$$

Miroir

Théorème

Les langages rationnels sont clos par miroir.

Mais :

$$\mathrm{Lang} \not\models a^{\smile} = a \qquad\qquad \mathrm{L}\left(a^{\smile}\right) = \{a\} = \mathrm{L}\left(a\right).$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \color{blue}{\Sigma} := \Sigma \cup \{a' \mid a \in \Sigma\} \\ \mathrm{Reg}^{\smile}_{\Sigma} & \to & \mathrm{Reg}_{\color{blue}{\Sigma}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (e+f)^{\smile} \mapsto e^{\smile} + f^{\smile} & 1^{\smile} \mapsto 1 & 0^{\smile} \mapsto 0 \\ (e \cdot f)^{\smile} \mapsto f^{\smile} \cdot e^{\smile} & a^{\smile} \mapsto a' & a'^{\smile} \mapsto a \\ (e^{\star})^{\smile} \mapsto \left(e^{\smile}\right)^{\star} & e^{\smile\smile} \mapsto e & \end{array}$$

Théorème

$$\mathrm{Lang} \models e = f \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{L}\left(\color{blue}{e}\right) = \mathrm{L}\left(\color{blue}{f}\right)$$

Miroir (suite)

$$(a+b)^{\smile} = a^{\smile} + b^{\smile} \tag{1}$$

$$(a \cdot b)^{\smile} = b^{\smile} \cdot a^{\smile} \tag{2}$$

$$(a^{\star})^{\smile} = \left(a^{\smile}\right)^{\star} \tag{3}$$

$$a^{\smile\smile} = a. \tag{4}$$

$\mathrm{KAC} \coloneqq \mathrm{KA} + (1) \ldots (4)$

Miroir (suite)

$$(a+b)^{\smile} = a^{\smile} + b^{\smile} \tag{1}$$
$$(a \cdot b)^{\smile} = b^{\smile} \cdot a^{\smile} \tag{2}$$
$$(a^{\star})^{\smile} = \left(a^{\smile}\right)^{\star} \tag{3}$$
$$a^{\smile\smile} = a. \tag{4}$$

$\mathrm{KAC} \coloneqq \mathrm{KA} + (1) \ldots (4)$

Théorème

$$\mathrm{KAC} \vdash e = f \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathsf{L}(e) = \mathsf{L}(f)$$

Réciproque

Pas la même théorie que les langages

$\mathrm{Lang} \not\models a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a$ $\qquad$ $\mathrm{Rel} \models a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a$

Réciproque

Pas la même théorie que les langages

$$\mathrm{Lang} \not\models a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a \qquad\qquad \mathrm{Rel} \models a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a$$

$$a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a \tag{5}$$

Théorème

$$\mathrm{Rel} \models e = f \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{KAC}' \vdash e = f$$

$\mathrm{KAC}' \coloneqq \mathrm{KAC} + (5)$

Réciproque (suite)

Comment décider cette équivalence ?

$$a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a$$

Réciproque (suite)

Comment décider cette équivalence ?

$$a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a$$

$$\overline{\varepsilon} := \varepsilon \qquad \overline{aw} := \overline{w}a' \qquad \overline{a'w} := \overline{w}a$$

Relation de réduction, clôture

$$w\overline{w}w \rhd w \qquad {}^{\lhd}L := \{u \mid \exists v \in L : v \rhd^{\star} u\}$$

Réciproque (suite)

Comment décider cette équivalence ?

$$a \leqslant a \cdot a^{\smile} \cdot a$$

$$\overline{\varepsilon} := \varepsilon \qquad \overline{aw} := \overline{w}a' \qquad \overline{a'w} := \overline{w}a$$

Relation de réduction, clôture

$$w\overline{w}w \rhd w \qquad {}^{\lhd}L := \{u \mid \exists v \in L : v \rhd^{\star} u\}$$

Théorème

Pour toute expression $e \in \mathrm{Reg}_{\Sigma}^{\smile}$, ${}^{\lhd}\mathsf{L}(e)$ est rationnel et :

$$\mathrm{Rel} \models e = f \qquad \Leftrightarrow \qquad {}^{\lhd}\mathsf{L}(e) = {}^{\lhd}\mathsf{L}(f)$$

Et les autres ?

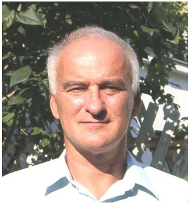
Algèbres de Kleene

Daniel Krob

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathsf{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet

Et les autres ?

Algèbres de Kleene avec Converse (Langages)

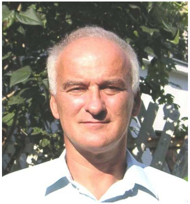


Zoltan Ésik

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathsf{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC	$\mathsf{L}(e)$	✗	✓	PSpace-complet

Et les autres ?

Algèbres de Kleene avec Converse (Relations)



Zoltan Ésik

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathsf{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, {}^\smile \rangle$	KAC	$\mathsf{L}(e)$	✗	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, {}^\smile \rangle$	KAC′	$^\triangleleft\mathsf{L}(e)$	✓	✗	PSpace-complet

Et les autres ?

Allégories

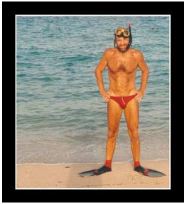
 

Peter Freyd & Andre Scedrov

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathsf{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC	$\mathsf{L}(e)$	✗	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC′	$^{\triangleleft}\mathsf{L}(e)$	✓	✗	PSpace-complet
$\langle 1, \cdot, ^\smile, \cap \rangle$	✗	$G(e)$	✓	✗	PSpace

Et les autres ?

Allégories de Kleene

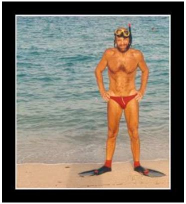
 

Hajnal Andréka & István Németi

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathsf{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC	$\mathsf{L}(e)$	✗	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC′	$^\triangleleft\mathsf{L}(e)$	✓	✗	PSpace-complet
$\langle 1, \cdot, ^\smile, \cap \rangle$	✗	$G(e)$	✓	✗	PSpace
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile, \cap \rangle$	?	$^\blacktriangleleft\mathcal{G}(e)$	✓	✗	?

Et les autres ?

Treillis de Kleene sans identité

Hajnal Andréka & István Németi

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathsf{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC	$\mathsf{L}(e)$	✗	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC′	$^{\triangleleft}\mathsf{L}(e)$	✓	✗	PSpace-complet
$\langle 1, \cdot, ^\smile, \cap \rangle$	✗	$G(e)$	✓	✗	PSpace
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile, \cap \rangle$	?	$^{\blacktriangleleft}\mathcal{G}(e)$	✓	✗	?
$\langle 0, +, \cdot, ^+, \cap \rangle$	?	$^{\blacktriangleleft}\mathcal{G}(e)$	✓	✓	ExpSpace

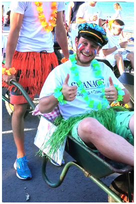
Et les autres ?

Algèbres de Kleene complémentées

Donald Monk

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathrm{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC	$\mathrm{L}(e)$	✗	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC′	${}^{\triangleleft}\mathrm{L}(e)$	✓	✗	PSpace-complet
$\langle \quad 1, \quad \cdot, \quad ^\smile, \cap \rangle$	✗	$G(e)$	✓	✗	PSpace
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile, \cap \rangle$	?	${}^{\blacktriangleleft}\mathcal{G}(e)$	✓	✗	?
$\langle 0, \quad +, \cdot, ^+, \quad \cap \rangle$	?	${}^{\blacktriangleleft}\mathcal{G}(e)$	✓	✓	ExpSpace
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^c \rangle$	✓	?	✓	✓	Indécidable

Et les autres ?

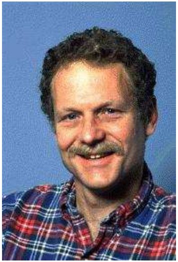


P.B.

Opérateurs	Axiomes	Langage	Rel	Lang	Complexité
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star \rangle$	KA	$\mathrm{L}(e)$	✓	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC	$\mathrm{L}(e)$	✗	✓	PSpace-complet
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile \rangle$	KAC′	$^{\triangleleft}\mathrm{L}(e)$	✓	✗	PSpace-complet
$\langle \quad 1, \quad \cdot, \quad ^\smile, \cap \rangle$	✗	$G(e)$	✓	✗	PSpace
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^\smile, \cap \rangle$	?	$^{\blacktriangleleft}\mathcal{G}(e)$	✓	✗	?
$\langle 0, \quad +, \cdot, ^+, \quad \cap \rangle$	?	$^{\blacktriangleleft}\mathcal{G}(e)$	✓	✓	ExpSpace
$\langle 0, 1, +, \cdot, ^\star, ^c \rangle$	✓	?	✓	✓	Indécidable

Plan

Algèbres de Kleene avec Tests



Dexter Kozen

On ajoute à une algèbre de Kleene une algèbre de Boole.

Décidable, axiomatisation complète.

```
c1;
while (t1){ c2 };
if (t2) then c3
         else c4;
```

$\mapsto$

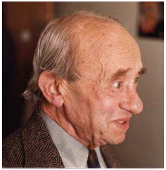
$$\mathtt{c1} \cdot (\mathtt{t1} \cdot \mathtt{c2})^\star \cdot \overline{\mathtt{t1}} \cdot (\mathtt{t2} \cdot \mathtt{c3} + \overline{\mathtt{t2}} \cdot \mathtt{c4})$$

Permet de montrer des théorèmes comme :

Théorème

Tout programme est équivalent à un programme ne contenant qu'une seule boucle.

C'est fini !



"snow is white" is true if and only if snow is white. Alfred Tarski.

Merci de votre attention !

`http://perso.ens-lyon.fr/paul.brunet/`

Plan