Décidabilité des Treillis de Kleene sans identité.

Journées Francophones des Langages Applicatifs

Paul Brunet & Damien Pous
Équipe Plume – LIP, CNRS, ENS de Lyon, Inria, UCBL, Université de Lyon, UMR 5668

7 - 10 janvier 2015

Plan

Expressions régulières

$$e, f \in \mathcal{R}eg_X ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid e \cdot f \mid e \vee f \mid e^\star$$

Interprétations

Expressions régulières

$$e, f \in \mathcal{R}eg_X ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid e \cdot f \mid e \vee f \mid e^\star$$

Interprétations

- *langages :* Σ un ensemble fini, $\sigma : X \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)$,
  $\emptyset$, $\{\epsilon\}$, concaténation, union ;

Les langages rationnels correspondent à $[\![\_]\!]$: $\begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{P}(X^\star) \\ x & \mapsto & \{x\}. \end{array}$

Expressions régulières

$$e, f \in \mathcal{R}eg_X ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid e \cdot f \mid e \vee f \mid e^\star$$

Interprétations

- *langages :* Σ un ensemble fini, $\sigma : X \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)$,
  $\emptyset$, $\{\epsilon\}$, concaténation, union ;
- *relations :* S un ensemble, $\sigma : X \to \mathcal{P}(S \times S)$,
  $\emptyset$, Id_S, composition, union.

Les langages rationnels correspondent à $[\![\_]\!] : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{P}(X^\star) \\ x & \mapsto & \{x\}. \end{array}$

Expressions régulières

$$e, f \in \mathcal{R}eg_X ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid e \cdot f \mid e \vee f \mid e^\star$$

Interprétations

- *langages :* Σ un ensemble fini, $\sigma : X \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)$, $\emptyset$, $\{\epsilon\}$, concaténation, union ;
- *relations :* S un ensemble, $\sigma : X \to \mathcal{P}(S \times S)$, $\emptyset$, Id_S, composition, union.

Les langages rationnels correspondent à $[\![\_]\!] : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{P}(X^\star) \\ x & \mapsto & \{x\}. \end{array}$

Équivalence dans un modèle

$e, f \in \mathcal{R}eg_X$

$$Rel \models e = f \quad \text{if} \quad \forall S, \forall \sigma : X \to \mathcal{P}\left(S \times S\right), \sigma(e) = \sigma(f)$$

Équivalence dans un modèle

$e, f \in \mathcal{R}eg_X$

$$Rel \models e = f \quad \text{if} \quad \forall S, \forall \sigma : X \to \mathcal{P}\left(S \times S\right), \sigma(e) = \sigma(f)$$

$$Rel \models e = f \;\Leftrightarrow\; [\![e]\!] = [\![f]\!]$$

Intersection

$$e, f \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge} ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid e \cdot f \mid e \wedge f \mid e \vee f \mid e^{\star}$$

Intersection

$$e, f \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge} ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid e \cdot f \mid e \wedge f \mid e \vee f \mid e^{\star}$$

$$Rel \models e = f \;\; \not\Leftarrow \;\; [\![e]\!] = [\![f]\!]$$

Exemple

$$[\![a \wedge b]\!] = \emptyset = [\![\mathbb{0}]\!]$$

$$\sigma(a) = \{(x, y), (y, z)\}$$
$$\sigma(b) = \{(y, z), (z, t)\}$$
$$\sigma(a \wedge b) = \{(y, z)\} \neq \emptyset = \sigma(\mathbb{0})$$

Une approche différente est nécessaire.

Plan

Graphes/Termes de base

$$u, v \in \mathcal{W}_X ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid u \cdot v \mid u \wedge v \mid u \vee v \mid u^\star$$

Graphes/Termes de base

$$G(\mathbb{1}) := \quad \longrightarrow \bullet \longrightarrow$$

$$G(x) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{x} \bullet \longrightarrow$$

$$G(u \cdot v) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{G(u)} \bullet \xrightarrow{G(v)} \bullet \longrightarrow$$

$$G(u \wedge v) := \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \bullet \arrow[r, bend left, "G(u)"] \arrow[r, bend right, "G(v)"'] & \bullet \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Graphes/Termes de base

$$G(\mathbb{1}) := \quad \longrightarrow \bullet \longrightarrow$$

$$G(x) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{x} \bullet \longrightarrow$$

$$G(u \cdot v) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{G(u)} \bullet \xrightarrow{G(v)} \bullet \longrightarrow$$

$$G(u \wedge v) := \quad \longrightarrow \bullet \overset{G(u)}{\underset{G(v)}{\rightrightarrows}} \bullet \longrightarrow$$

Exemple

$$G(a \cdot b) : \quad \longrightarrow \bigcirc \xrightarrow{a} \bigcirc \xrightarrow{b} \bigcirc \longrightarrow$$

Graphes/Termes de base

$$G(\mathbb{1}) := \quad \longrightarrow \bullet \longrightarrow$$

$$G(x) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{x} \bullet \longrightarrow$$

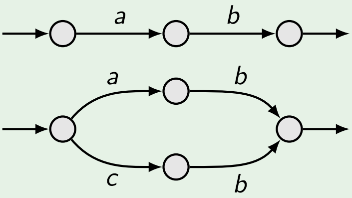
$$G(u \cdot v) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{G(u)} \bullet \xrightarrow{G(v)} \bullet \longrightarrow$$

$$G(u \wedge v) := \quad \longrightarrow \bullet \underset{G(v)}{\overset{G(u)}{\rightrightarrows}} \bullet \longrightarrow$$

Exemple

$G\,(a \cdot b)$:

$G\,((a \cdot b) \wedge (c \cdot b))$:



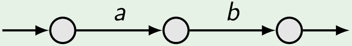
Graphes/Termes de base

$$G(\mathbb{1}) := \quad \longrightarrow \bullet \longrightarrow \qquad G(u \cdot v) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{G(u)} \bullet \xrightarrow{G(v)} \bullet \longrightarrow$$

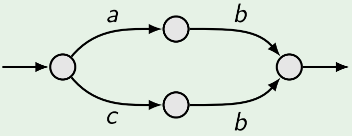
$$G(x) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{x} \bullet \longrightarrow \qquad G(u \wedge v) := \quad \longrightarrow \bullet \overset{G(u)}{\underset{G(v)}{\rightrightarrows}} \bullet \longrightarrow$$

Exemple

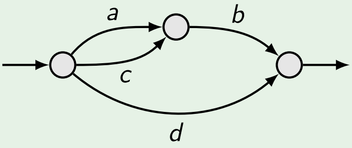
$G\left(a \cdot b\right)$:



$G\left(\left(a \cdot b\right) \wedge \left(c \cdot b\right)\right)$:



$G\left(\left(\left(a \wedge c\right) \cdot b\right) \wedge d\right)$:



Graphes/Termes de base

$$G(\mathbb{1}) := \quad \longrightarrow \bullet \longrightarrow$$

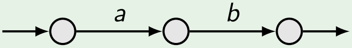
$$G(x) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{x} \bullet \longrightarrow$$

$$G(u \cdot v) := \quad \longrightarrow \bullet \xrightarrow{G(u)} \bullet \xrightarrow{G(v)} \bullet \longrightarrow$$

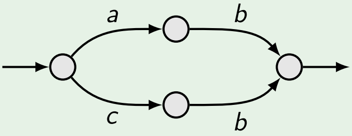
$$G(u \wedge v) := \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \bullet \arrow[r, bend left, "G(u)"] \arrow[r, bend right, "G(v)"'] & \bullet \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Exemple

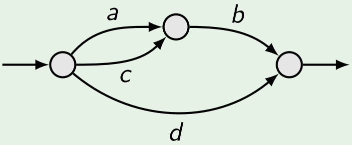
$G\left(a \cdot b\right)$:



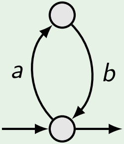
$G\left(\left(a \cdot b\right) \wedge \left(c \cdot b\right)\right)$:



$G\left(\left(\left(a \wedge c\right) \cdot b\right) \wedge d\right)$:



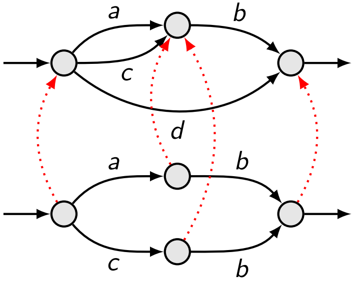
$G\left(\left(a \cdot b\right) \wedge \mathbb{1}\right)$:



Préordres

Préordre sur les graphes

$G \blacktriangleleft G'$ si il existe un morphisme de graphe de G' vers G.



$$((a \wedge c) \cdot b) \wedge d$$

$$\vartriangle$$

$$(a \cdot b) \wedge (c \cdot b)$$

Préordre sur les termes

$u \vartriangleleft v$ si $G(u) \blacktriangleleft G(v)$.

Théorème de caractérisation

Théorème

$u, v \in \mathcal{W}_X$,

$$Rel \models u \leqslant v \Leftrightarrow u \lhd v$$

- P. J. Freyd and A. Scedrov. *Categories, Allegories.* NH, 1990
- H. Andréka and D. Bredikhin.

  The equational theory of union-free algebras of relations. *Alg. Univ.*, 33(4) :516–532, 1995

Graphes/Langages de termes

$$[\![\_]\!] : \mathcal{R}eg_X^{\wedge} \to \mathcal{P}(\mathcal{W}_X)$$

$$\begin{aligned}
[\![\mathbb{0}]\!] &:= \emptyset \\
[\![\mathbb{1}]\!] &:= \{\mathbb{1}\} \\
[\![x]\!] &:= \{x\} \\
[\![e \cdot f]\!] &:= \{w \cdot w' \mid w \in [\![e]\!] \text{ and } w' \in [\![f]\!]\} \\
[\![e \wedge f]\!] &:= \{w \wedge w' \mid w \in [\![e]\!] \text{ and } w' \in [\![f]\!]\} \\
[\![e \vee f]\!] &:= [\![e]\!] \cup [\![f]\!] \\
[\![e^\star]\!] &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{w_1 \cdot \dots \cdot w_n \mid \forall i, w_i \in [\![e]\!]\} \quad .
\end{aligned}$$

Langage de graphes d'une expression

$e \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge}$,

$$G(e) := \{G(w) \mid w \in [\![e]\!]\} .$$

Théorème de caractérisation

$S^{\blacktriangleright} := \{G \mid \exists G' \in S : G' \blacktriangleright G\}.$

Théorème

$e, f \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge}$,

$$Rel \models e \leqslant f \Leftrightarrow G(e)^{\blacktriangleright} \subseteq G(f)^{\blacktriangleright}$$

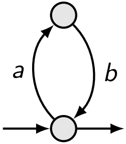
Se déduit facilement de :

H. Andréka, S. Mikulás, and I. Németi. The equational theory of Kleene lattices. *TCS*, 412(52) :7099–7108, 2011

Plan

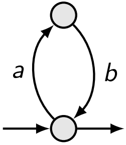
Restriction : termes sans identité

$G((a \cdot b) \wedge \mathbb{1})$:



Restriction : termes sans identité

$G\left((a \cdot b) \wedge \mathbb{1}\right)$:

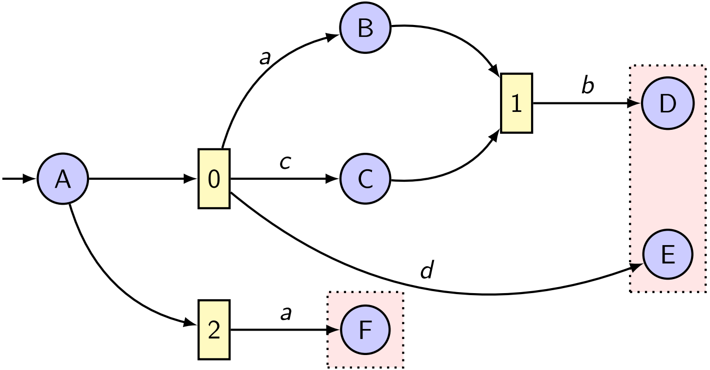


$$u, v \in \mathcal{W}_X^- ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid u \cdot v \mid u \wedge v \mid u \vee v \mid u^\star$$

$$e, f \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge -} ::= \mathbb{0} \mid \mathbb{1} \mid x \in X \mid e \cdot f \mid e \wedge f \mid e \vee f \mid e^+$$

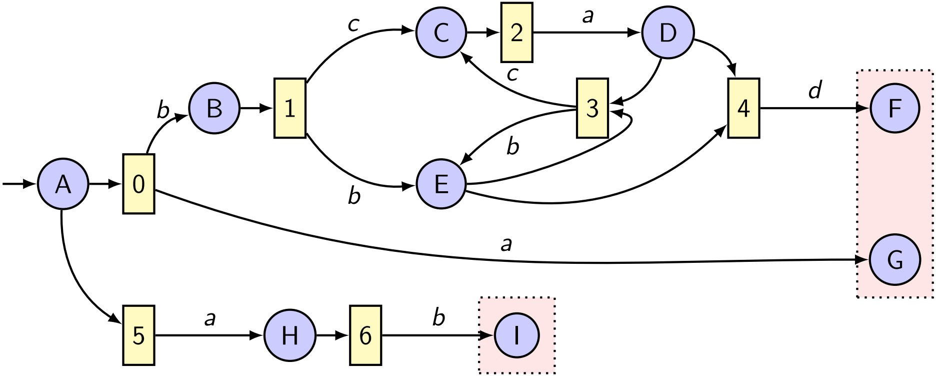
Exemple

$$(((a \wedge c) \cdot b) \wedge d) \vee a$$

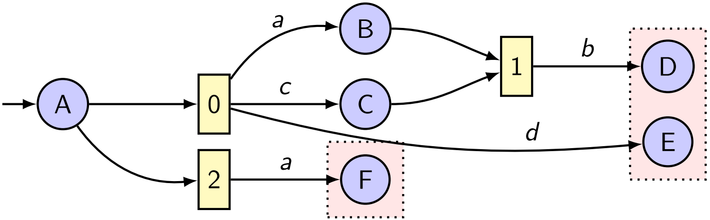


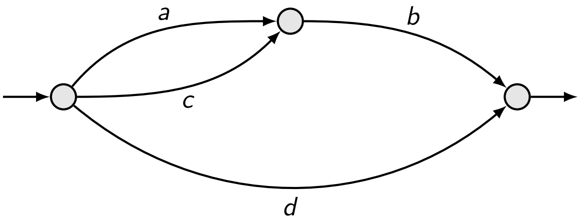
Exemple

$$\Big(b \cdot (a \cdot c \wedge b)^{+} \cdot d\Big) \wedge a \;\vee\; a \cdot b$$

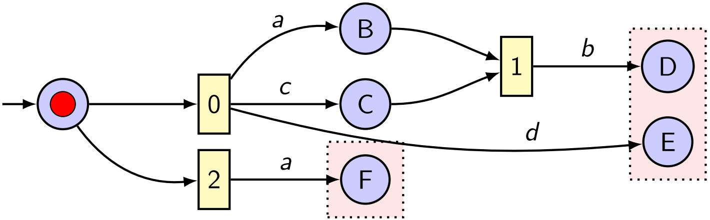


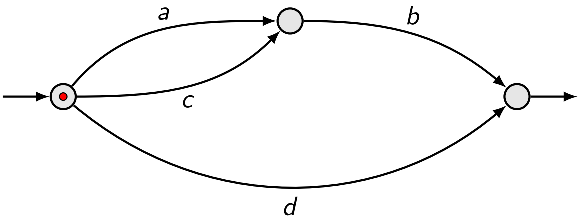
Lire un graphe dans un automate



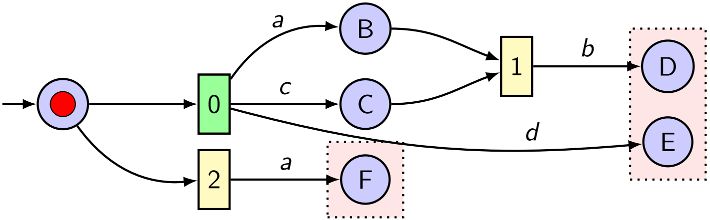


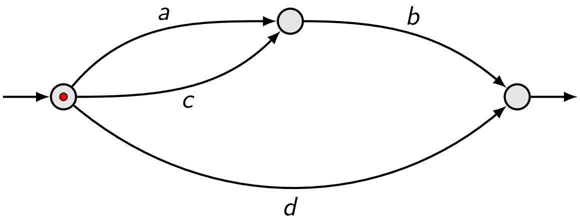
Lire un graphe dans un automate



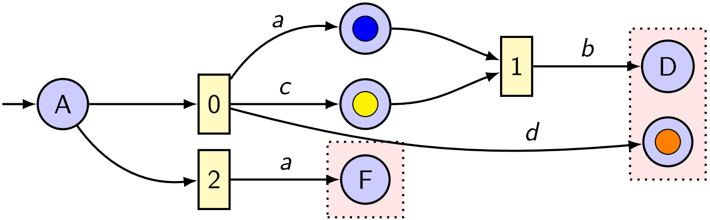


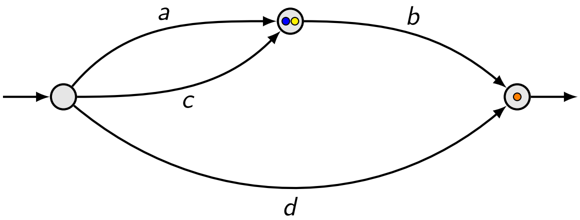
Lire un graphe dans un automate



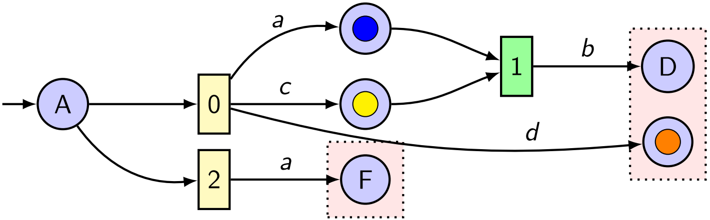


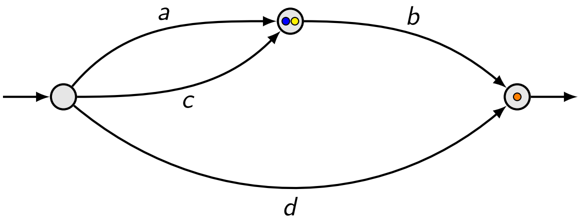
Lire un graphe dans un automate



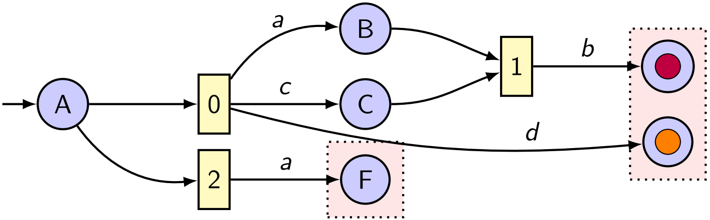


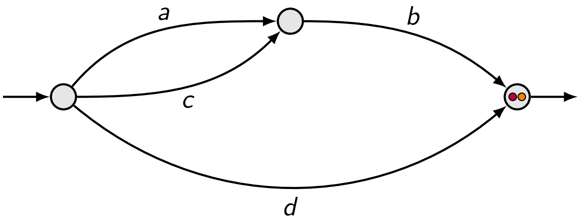
Lire un graphe dans un automate





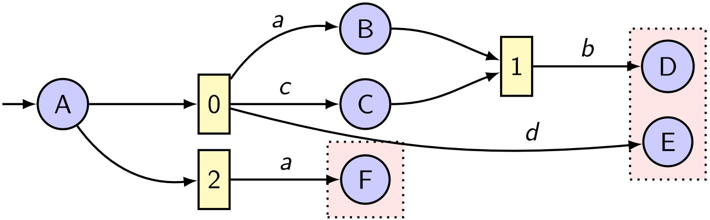
Lire un graphe dans un automate

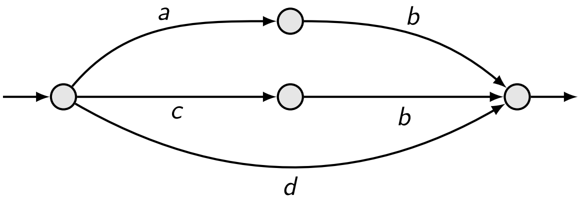




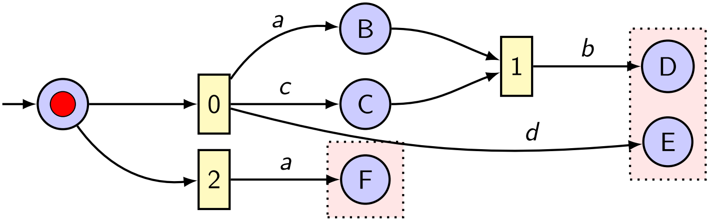
Succès !

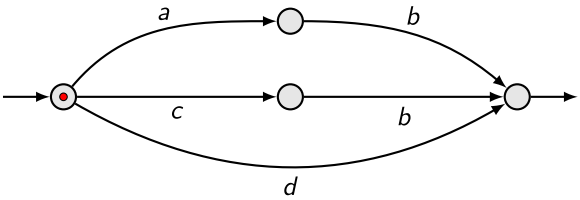
Lire un graphe dans un automate



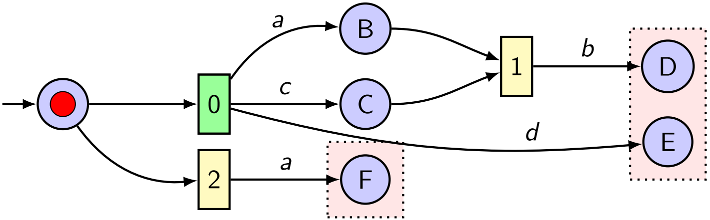


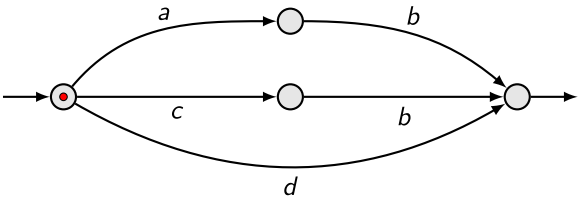
Lire un graphe dans un automate



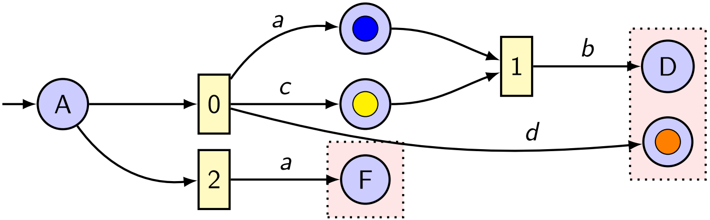


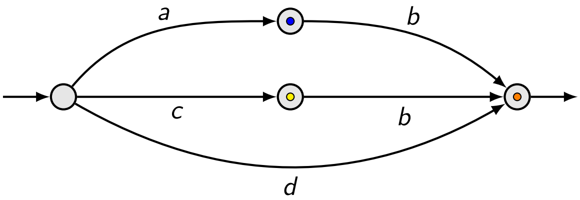
Lire un graphe dans un automate



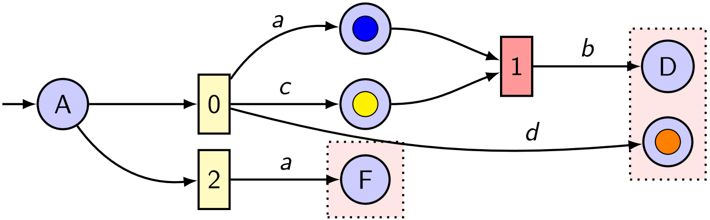


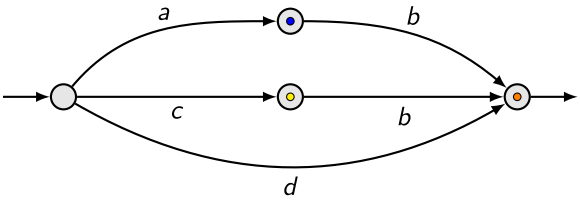
Lire un graphe dans un automate





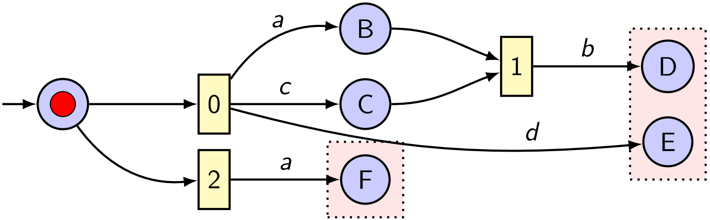
Lire un graphe dans un automate

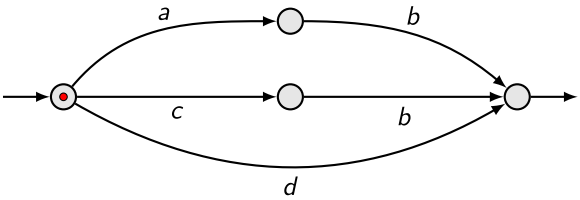




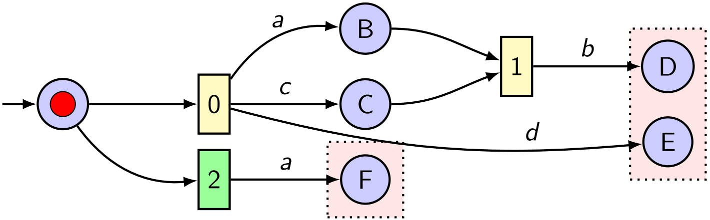
Échec !

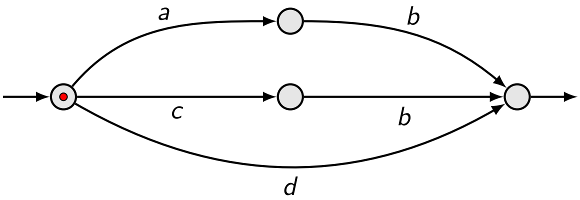
Lire un graphe dans un automate



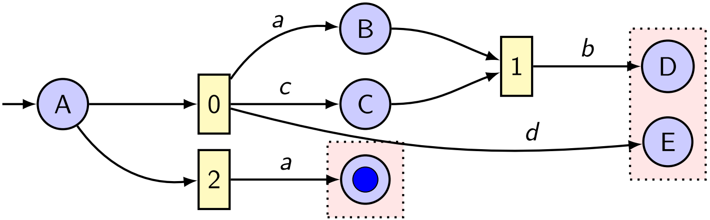


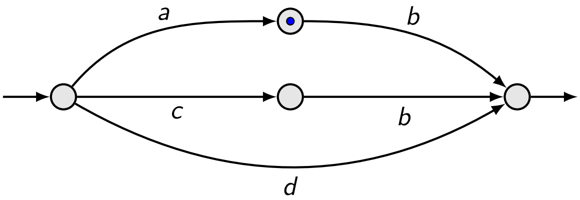
Lire un graphe dans un automate



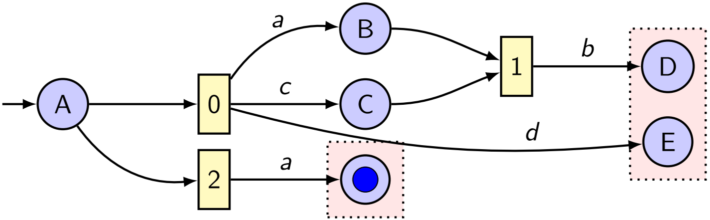


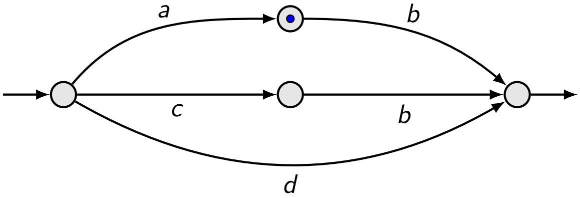
Lire un graphe dans un automate





Lire un graphe dans un automate





Échec !

Langage reconnu par un automate

Correction

Pour tout $e \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge -}$,

$$e$$

Langage reconnu par un automate

Correction

Pour tout $e \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge -}$,

$$\mathscr{A}(e)$$

Langage reconnu par un automate

Correction

Pour tout $e \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge -}$,

$$\mathscr{L}\left(\mathscr{A}(e)\right)$$

Langage reconnu par un automate

Correction

Pour tout $e \in \mathcal{R}eg_X^{\wedge -}$,

$$\mathscr{L}\left(\mathscr{A}(e)\right) = G\left(e\right)^{\blacktriangleright}.$$

Plan

Comparaison d'automates

$$Rel \models e \leqslant f \;\Leftrightarrow\; G(e)^{\blacktriangleright} \subseteq G(f)^{\blacktriangleright} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{L}(\mathscr{A}(e)) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}(f)).$$

Problème :

Comment comparer deux automates de Petri ?

Comparaison d'automates

$$Rel \models e \leqslant f \;\Leftrightarrow\; G(e)^{\blacktriangleright} \subseteq G(f)^{\blacktriangleright} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{L}(\mathscr{A}(e)) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}(f)).$$

Problème :

Comment comparer deux automates de Petri ?

... pas si facilement

Comparaison d'automates

$$Rel \models e \leqslant f \;\Leftrightarrow\; G(e)^{\blacktriangleright} \subseteq G(f)^{\blacktriangleright} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{L}(\mathscr{A}(e)) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}(f)).$$

Problème :

Comment comparer deux automates de Petri ?

... pas si facilement

$\mathscr{L}(\mathscr{A}_1) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}_2)$ exactement quand il existe une relation de simulation

$$\leqslant \subseteq \mathcal{P}(P_1) \times \mathcal{P}(P_2 \dashrightarrow P_1)$$

entre les configurations de $\mathscr{A}_1$ et les applications partielles des places de $\mathscr{A}_2$ vers celles de $\mathscr{A}_1$.

Comparaison d'automates

$$Rel \models e \leqslant f \;\Leftrightarrow\; G(e)^{\blacktriangleright} \subseteq G(f)^{\blacktriangleright} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{L}(\mathscr{A}(e)) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}(f)).$$

Problème :

Comment comparer deux automates de Petri ?

. . . pas si facilement

$\mathscr{L}(\mathscr{A}_1) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{A}_2)$ exactement quand il existe une relation de simulation

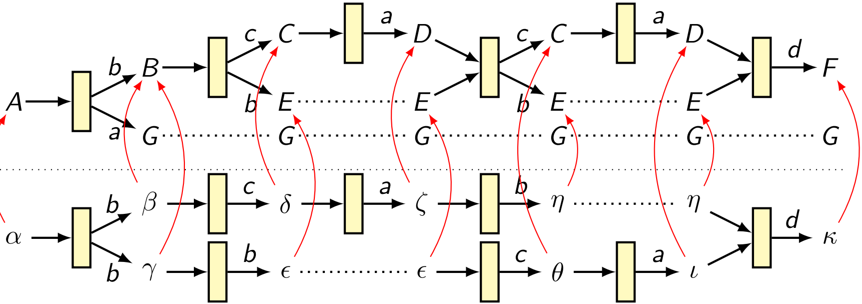
$$\preccurlyeq \subseteq \mathcal{P}(P_1) \times \mathcal{P}(P_2 \dashrightarrow P_1)$$

entre les configurations de $\mathscr{A}_1$ et les applications partielles des places de $\mathscr{A}_2$ vers celles de $\mathscr{A}_1$.

Complexité

L'équivalence d'automates de Petri est EXP-space complète.

Comparaison d'exécutions



Conclusion et perspectives

Résultats

- Réduction de l'équivalence relationnelle à l'égalité de langages de graphes clos.

Il reste à faire ...

Conclusion et perspectives

Résultats

- Réduction de l'équivalence relationnelle à l'égalité de langages de graphes clos.
- Représentation de langages de graphes clos à l'aide d'automates de Petri.

Il reste à faire ...

Conclusion et perspectives

Résultats

- Réduction de l'équivalence relationnelle à l'égalité de langages de graphes clos.
- Représentation de langages de graphes clos à l'aide d'automates de Petri.
- Décidabilité de l'équivalence d'automates, et donc de l'équivalence relationnelle.

Il reste à faire ...

Conclusion et perspectives

Résultats

- Réduction de l'équivalence relationnelle à l'égalité de langages de graphes clos.
- Représentation de langages de graphes clos à l'aide d'automates de Petri.
- Décidabilité de l'équivalence d'automates, et donc de l'équivalence relationnelle.

Cette procédure de décision a été implémentée en OCaml, et est disponible dans un applet en ligne.

Il reste à faire ...

Conclusion et perspectives

Résultats

- Réduction de l'équivalence relationnelle à l'égalité de langages de graphes clos.
- Représentation de langages de graphes clos à l'aide d'automates de Petri.
- Décidabilité de l'équivalence d'automates, et donc de l'équivalence relationnelle.

Cette procédure de décision a été implémentée en OCaml, et est disponible dans un applet en ligne.

Il reste à faire ...

- la décidabilité avec $\mathbb{1}$;

Conclusion et perspectives

Résultats

- Réduction de l'équivalence relationnelle à l'égalité de langages de graphes clos.
- Représentation de langages de graphes clos à l'aide d'automates de Petri.
- Décidabilité de l'équivalence d'automates, et donc de l'équivalence relationnelle.

Cette procédure de décision a été implémentée en OCaml, et est disponible dans un applet en ligne.

Il reste à faire ...

- la décidabilité avec $\mathbb{1}$;
- la complétude ;

Conclusion et perspectives

Résultats

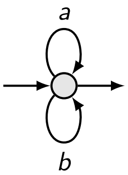
- Réduction de l'équivalence relationnelle à l'égalité de langages de graphes clos.
- Représentation de langages de graphes clos à l'aide d'automates de Petri.
- Décidabilité de l'équivalence d'automates, et donc de l'équivalence relationnelle.

Cette procédure de décision a été implémentée en OCaml, et est disponible dans un applet en ligne.

Il reste à faire ...

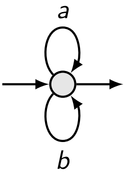
- la décidabilité avec $\mathbb{1}$;
- la complétude ;
- l'extension avec l'opérateur "converse".

Le problème de l'identité



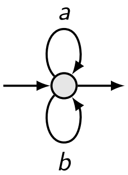
Le problème de l'identité

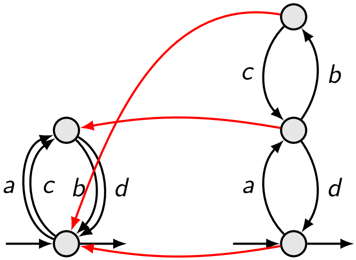
$$\begin{aligned} a \wedge b \wedge \mathbb{1} &= (a \wedge \mathbb{1}) \cdot (b \wedge \mathbb{1}) \\ &= (b \wedge \mathbb{1}) \cdot (a \wedge \mathbb{1}) \\ &= (a \cdot (b \wedge \mathbb{1})) \wedge \mathbb{1} \\ &= ((a \wedge \mathbb{1}) \cdot b) \wedge \mathbb{1} \end{aligned}$$



Le problème de l'identité

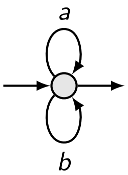
$$\begin{aligned} a \wedge b \wedge \mathbb{1} &= (a \wedge \mathbb{1}) \cdot (b \wedge \mathbb{1}) \\ &= (b \wedge \mathbb{1}) \cdot (a \wedge \mathbb{1}) \\ &= (a \cdot (b \wedge \mathbb{1})) \wedge \mathbb{1} \\ &= ((a \wedge \mathbb{1}) \cdot b) \wedge \mathbb{1} \end{aligned}$$



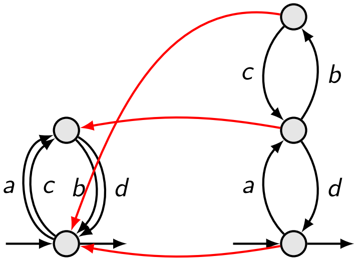


Le problème de l'identité

$$\begin{aligned} a \wedge b \wedge \mathbb{1} &= (a \wedge \mathbb{1}) \cdot (b \wedge \mathbb{1}) \\ &= (b \wedge \mathbb{1}) \cdot (a \wedge \mathbb{1}) \\ &= (a \cdot (b \wedge \mathbb{1})) \wedge \mathbb{1} \\ &= ((a \wedge \mathbb{1}) \cdot b) \wedge \mathbb{1} \end{aligned}$$



$$(a \wedge c) \cdot (b \wedge d) \wedge \mathbb{1} > a \cdot (b \cdot c \wedge \mathbb{1}) \cdot d \wedge \mathbb{1}$$



Et voilà !

Merci !

Ce support de présentation sera disponible sur ma page personelle :

`http://perso.ens-lyon.fr/paul.brunet/rklm`.

Plan