TD 0 - Introduction

Première partie – Problèmes et codages

Exercice 1. SAT et TAUTO

Les formules booléennes sur un ensemble fini de variables A sont définies par la grammaire suivante :

$$\varphi, \psi \in \mathsf{F}(A) ::= a \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \neg\varphi.$$

Étant donnée une fonction $\sigma : A \to \{\top, \bot\}$ qui donne à chaque variable une valeur de vérité, on peut définir une fonction d'interprétation :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\sigma}(a) := \sigma(a) & \hat{\sigma}(\top) := \top & \hat{\sigma}(\bot) := \bot \\ \hat{\sigma}(\varphi \vee \psi) := \hat{\sigma}(\varphi) \vee \hat{\sigma}(\psi) & \hat{\sigma}(\varphi \wedge \psi) := \hat{\sigma}(\varphi) \wedge \hat{\sigma}(\psi) & \hat{\sigma}(\neg\varphi) := \neg\hat{\sigma}(\varphi) \end{array}$$

où $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ sont interprétés respectivement par la disjonction, conjonction et négation sur les booléens.

On dit d'une formule $\varphi \in \mathsf{F}(A)$ qu'elle est satisfiable s'il existe une fonction d'évaluation $\sigma : A \to \{\top, \bot\}$ telle que $\hat{\sigma}(\varphi) = \top$.

On considère, pour un ensemble A donné, le problème suivant :

> **SAT** — *Satisfiabilité d'une formule booléenne*
> Étant donnée une formule $\varphi \in \mathsf{F}(A)$, est-elle satisfiable ?

Question 1. Déterminer pour chacune des formules suivantes si elles sont satisfiables :

a - $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$

b - $a \wedge (b \wedge \neg b)$

Question 2. Définir l'ensemble d'instances et l'ensemble d'instances positives de SAT.

Une tautologie est une formule $\varphi \in \mathsf{F}(A)$ qui est universellement vraie, autrement dit telle que

$$\forall \sigma \in \{\top, \bot\}^A,\ \hat{\sigma}(\varphi) = \top.$$

On considère maintenant le problème TAUTO :

> **TAUTO** — *Universalité d'une formule booléenne*
> La formule $\varphi \in \mathsf{F}(A)$ est-elle une tautologie ?

Question 3. Définir l'ensemble d'instances et l'ensemble d'instances positives de TAUTO.

Question 4. Trouvez une fonction $f : I_{\mathsf{TAUTO}} \to I_{\mathsf{SAT}}$ telle que

$$\forall \varphi \in I_{\mathsf{TAUTO}},\ \varphi \in E_{\mathsf{TAUTO}} \Leftrightarrow f(\varphi) \notin E_{\mathsf{SAT}}.$$

Exercice 2. REACH

Définir l'ensemble d'instances et l'ensemble d'instances positives du problème suivant :

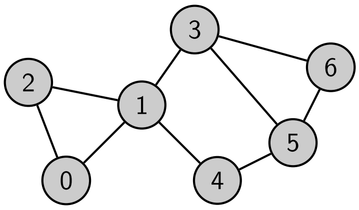
> **REACH** — *Accessibilité entre deux noeuds d'un graphe*
> Soit $G = \langle V, E \rangle$ un graphe orienté, et $u, v \in V$ deux de ses noeuds. Peut-on trouver un chemin dans G allant de u à v ?

Exercice 3. COLOUR

Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. Dans cet exercice, on appelle « couleurs » des entiers tirés d'un ensemble fini de la forme $\{1, 2, \ldots, k\}$. Un coloriage est une fonction $\kappa : V \to \{1, \ldots, k\}$ associant à chaque sommet une couleur Graphiquement, on peut représenter un coloriage en associant k couleurs distinctes aux entiers $\{1, \ldots, k\}$, et en coloriant chaque sommet $u \in V$ du graphe de la couleur associée à l'entier $\kappa(u)$.

COLOUR *k-coloriabilité d'un graphe*
Soit $G = \langle V, E\rangle$ un graphe non-orienté, et k un entier, existe-t'il un coloriage tel que deux sommet adjacents aient toujours deux couleur différentes ?

Question 1. Le graphe suivant est-il 2-coloriable ? Est-il 3-coloriable ?



Question 2. Définir l'ensemble d'instances et l'ensemble d'instances positives de COLOUR.

Exercice 4. Codages

Question 1. Proposer un codage pour chacun des problèmes SAT, REACH et COLOUR.

Question 2. Donner les codages des instances données en exemple dans les exercices 1 et 3.

Deuxième partie – Modèles de calcul

Exercice 5.

Soit $L \subseteq \Sigma^\star$ un langage, et $\mathscr{M} = \langle \mathbb{M}, \models \rangle$ un modèle.

Question. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont équivalentes à l'énoncé « le langage L est exprimable par le modèle $\mathscr{M}$ » ?

1. $L \in \mathscr{M}$
2. $\exists M \in \mathbb{M} : L \in M$
3. $L \in \mathrm{Lang}(\mathscr{M})$
4. $L \in \mathbb{M}$
5. $\exists M \in \mathbb{M} : L = L_M$
6. $\exists M \in \mathbb{M} : L_M \in L$
7. $\exists M \in \mathbb{M} : \forall w,\ w \in L \Leftrightarrow w \models M$
8. $\exists M \in \mathbb{M} : \forall w,\ w \in L \Rightarrow w \in L_M$

Exercice 6.

Montrer que pour toute paire de modèles $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ on a :

$$\mathscr{M}_1 \preceq \mathscr{M}_2 \Leftrightarrow \mathrm{Lang}\left(\mathscr{M}_1\right) \subseteq \mathrm{Lang}\left(\mathscr{M}_2\right)$$