TD 4 - Indécidabilité

Exercice 1. Problèmes indécidables

Montrer que les problèmes suivants sont indécidables :

a - (Arrêt sur le mot vide) $\{\mathcal{M} \mid \varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$.

b - (Vacuité du langage) $\{\mathcal{M} \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \emptyset\}$.

c - (Universalité) $\{\mathcal{M} \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^\star\}$.

d - (Équivalence) $\{\langle\mathcal{M}, \mathcal{M}'\rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')\}$.

Solution :

Pour répondre à cet exercice, on va utiliser une même construction pour produire plusieurs réductions. On fixe comme alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Soit $\mathcal{M}$ une machine de Turing, et $w \in \Sigma^\star$ un mot. On note w_i la $i^{\text{ème}}$ lettre du mot w, c'est à dire que $w = w_1 \cdots w_n$, où n est la longueur du mot.
On construit une machine $\mathcal{M}'(\mathcal{M}, w)$ dont le fonctionnement est comme suit :

1. la machine commence par effacer le mot initialement écrit sur le ruban ;
2. ensuite, elle écrit le mot w à la place ;
3. ensuite, elle simule l'exécution de la machine $\mathcal{M}$ sur ce mot ;
4. dès que la simulation se termine, elle finit son exécution sur un état acceptant.

On peut se convaincre que la fonction qui prend en entrée le code de la paire $\mathcal{M}, w$ et produit en sortie le code de $\mathcal{M}'$ est calculable.
Analysons le comportement de $\mathcal{M}'$. Deux cas de figure sont à distinguer :

— soit $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, auquel cas $\mathcal{M}'$ va toujours accepter son entrée, et on a donc $\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \Sigma^\star$;

— soit $w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M})$, et dans ce cas $\mathcal{M}'$ rejette systématiquement son entrée, ce qui signifie donc que $\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset$.

Ces deux cas étant à la fois exhaustifs et disjoints, on en déduit les deux équivalences suivantes :

$$w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \Sigma^\star \tag{1}$$
$$w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset. \tag{2}$$

On va maintenant utiliser cette fonction comme une réduction pour montrer l'indécidabilité des problèmes considérés.

a - On vérifie sans peine que

a) $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Rightarrow \varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{M}')$, autrement dit que les instances positives du problème de l'arrêt sont envoyées sur des instances positives de l'arrêt sur le mot vide ;

b) et que $w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Rightarrow \varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}')$, autrement dit que les instances négatives du problème de l'arrêt sont envoyées sur des instances négatives de l'arrêt sur le mot vide.

La fonction ci-dessus est donc une réduction du problème de l'arrêt vers le problème de l'arrêt sur le mot vide. Le premier étant indécidable, le second l'est également.

b - On vérifie sans peine que

a) $w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset$, autrement dit que les instances négatives du problème de l'arrêt sont envoyées sur des instances positives de la vacuité ;

b) et que $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \Sigma^\star \neq \emptyset$, autrement dit que les instances positives du problème de l'arrêt sont envoyées sur des instances négatives de la vacuité.

La fonction ci-dessus est donc une réduction du complémentaire du problème de l'arrêt vers le problème de la vacuité. Le problème de l'arrêt étant indécidable, sont complémentaire l'est aussi. Ce dernier se réduisant vers la vacuité, la vacuité est indécidable.

c - Il est à nouveau immédiat de remarquer que

a) $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \Sigma^\star$, autrement dit que les instances positives du problème de l'arrêt sont envoyées sur des instances positives de l'universalité ;

b) et que $w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset \neq \Sigma^\star$, autrement dit que les instances négatives du problème de l'arrêt sont envoyées sur des instances négatives de l'universalité.

La fonction ci-dessus est donc une réduction du problème de l'arrêt vers le problème de l'universalité, donc ce problème est indécidable.

d - Pour le dernier, il faut modifier légèrement notre fonction, pour qu'elle produise des paires de machines. On choisit d'associer à la paire $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ la paire $\langle \mathcal{M}', \mathcal{M}_\star \rangle$, où $\mathcal{M}_\star$ est la machine sans transition dont l'état initial est acceptant, autrement dit dont le codage est $$0. Remarquons que cette machine, qui accepte tous les mots, vérifie donc $\mathcal{L}(\mathcal{M}_\star) = \Sigma^\star$. On peut donc conclure, grâce aux équivalences suivantes :

$$w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \Sigma^\star = \mathcal{L}(\mathcal{M}_\star)$$
$$w \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset \neq \mathcal{L}(\mathcal{M}_\star).$$